Université Paris 13 Année 2013-2014
L2 **feuille n° 3**

Séries numériques 1

Exercice 1 La série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ est convergente ? Et absolument convergente ?

Exercice 2 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'intervalle ouvert $(0,1)$. Prouver l'équivalence suivante

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=0}^{N}(1-a_n)=0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n=+\infty.$$

Sujestion : utiliser le développement $\log(t)=t+o(t)$.

Exercice 3 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive et décroissante. Prouver que pour tout entier fixé k on a l'équivalence suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=+\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}k^n a_{k^n}=+\infty.$$

Exercice 4 Déterminer les valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}_+$ tels que on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}=+\infty.$$

Exercice 5 Étudier la convergence des séries suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n,\qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n,\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{\frac{1}{3}}}{(n+1)\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\prod_{k=1}^{n}\frac{3k-1}{4k-3},\qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1},\qquad \sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \sum_{n\geqslant 1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2},\qquad \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)},\qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

Exercice 6 Étudier la convergence et calculer la somme des séries suivantes.

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{3^n},\qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{n^4+n^2+1},\qquad \sum_{n\geqslant 3}\frac{2n-1}{n^3-4n}.$$

Exercice 7 Pour tout entier positif n, on pose

$$u_n=\begin{cases}1/2^k & \text{si } n=2k\,;\\ 1/(2^k+1) & \text{si } n=2k-1.\end{cases}$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n en utilisant les critères de d'Alembert et de Cauchy. Calculer la somme de cette série.

Exercice 8 Soient u et v deux suites positives. On suppose que les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes. Étudier les séries de terme général $w_n = \sqrt{u_n v_n}$ et $t_n = \sqrt{u_n}/n$.

Exercice 9 Soit u une suite positive. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que la série de terme général $v_n = u_n/(1+u_n)$ est convergente.

Exercice 10 Prouver que pour tout entier N on a $|\sum_{n=0}^{N} \sin(n)| < 4$, mais que la série ne converge pas. *Sujestion : considerer la série géométrique* $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in}$.
Prouver la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$$

à l'aide du lemme suivant et de son corollaire, puis prouver le corollaire.

Lemme d'Abel. *Soient a_n et b_n deux suites dans $\mathbb{C}$. Pour tout n on pose $B_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$. Alors pour tout M et N en $\mathbb{N}$ avec $N > M > 0$ on a*

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} B_n(a_{n+1} - a_n).$$

Corollaire. Soit b_n une suite dont les sommes partiels B_n sont uniformement bornées. Si $a_n \to 0$ pour $n \to \infty$ et $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge absolument, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.