

Séries numériques 2

Exercice 1 Montrer la convergence et calculer la somme des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k} \right).$$

Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^3 - k}.$$

Exercice 2 On considère les séries suivantes. Convergent-elles ? Convergent-elles absolument ?

Modèles

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right), \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - 3\ln(n)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

À faire seuls

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k^2+1}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}} \\ & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3+1}}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3+1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \\ & \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n) \left(n^{\frac{1}{n}} \right)}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos n}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}$.

Exercice 4

$$f(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 + \ln k}$$

1. Montrer que $f(x)$ a un sens pour tout x et donner un encadrement de $f(x)$
2. Que dire du signe de $f(x)$? Admet-elle une limite en $+\infty$? Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x f(x)$.
Peut-on affirmer que la fonction f est majorée sur $[0, +\infty[$?
3. Donner un majorant de $\left| f(x) - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{x^2 + \ln k} \right|$.

Exercice 5 On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$ pour $n \geq 1$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \geq 0$. On note $f(x)$ la somme. Montrer que $0 < f(x) \leq \frac{1}{1+x}$. Comparer $f(x)$ et $f(x+1)$.
2. Montrer que pour tout x et x_0 dans $[0, +\infty[$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
3. Montrer qu'en fait on peut définir f sur $] -1, +\infty[$ et calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

Exercice 6 On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha} + (-1)^n}$, où $\alpha > 0$.

1. Trouver un équivalent simple de u_n
2. Pour quelles valeurs de α la série est-elle absolument convergente ?
Pour quelles valeurs de α la série est-elle convergente ?
3. Faire une remarque sur les équivalents.

Exercice 7 Etudier la nature de la série de terme général $w_n = \frac{(-1)^n \ln^q n}{n^s}$ où $s > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 2n + 2})$.

Exercice 9 Soit $\alpha \in]-\infty, 1]$. La série de terme général $v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?

Exercice 10 Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

1. Ecrire u_n sous la forme $\frac{(-1)^n}{n} + v_n$. En déduire que la série (u_n) converge.
2. Calculer la limite de cette série.

Exercice 11 Déterminer la nature de la série de terme général $w_n = \int_0^1 (x \cos \pi x)^n dx$.
A-t-on convergence absolue ?

Exercice 12 Soit (a_n) une suite de limite nulle ; montrer que les séries (a_n) et $(a_{2n} + a_{2n+1})$ sont de même nature.

En déduire la nature de la série de terme général $a_n = \frac{(-1)^n \sin \ln n}{n}$.

indication : On pourra majorer $a_{2n} + a_{2n+1}$.