Université Paris 13 Année 2013-2014

L2 Analyse et Algèbre **feuille n° 5**

Séries entières

Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

– Example

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+5}$$

– Autres

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 3^n (\ln n) x^n \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} x^n \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos n}{n^2} x^n \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{n\pi}{3}) x^n \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^n}{(n+1)!} x^n.$$

Exercice 2 Donner le rayon de convergence et calculer la somme de chacune des séries entières suivantes :

– Example

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n$$

– Autres

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \ , \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \ , \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n+1} x^n$$

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, trouver un intervalle $]-R, R[$ sur lequel elle est développable en série entière et donner ce développement.

1. $\dfrac{1}{x-7}$
2. $\dfrac{1}{(x-7)^3}$
3. $\dfrac{2x+4}{(x-2)(x-3)}$
4. $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$
5. $\dfrac{e^x}{1-x}$
6. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

Exercice 4 Montrer que les séries entières suivantes ont pour le rayon de convergence 1 :

$$\sum z^n, \qquad \sum \frac{z^n}{n}, \qquad \sum \frac{z^n}{n^2} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Sont-elles convergentes lorsque $|z| = 1$?

Exercice 5 Soit z un nombre complexe et soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n}}{n}$ une série entière.

1. Préciser les coefficients et les sommes partielles de cette série entière.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série.
3. Que peut-on dire de la convergence de la série si $z = \pm R$, si $z = \pm iR$.

4. On admettra que les séries de terme général $\frac{\cos(nt)}{n}$ et $\frac{\sin(nt)}{n}$ sont convergentes pour tout $t \in]0, 2\pi[$.
   Montrer que la série entière $\sum \frac{z^{2n}}{n}$ est convergente si $|z| = R$ et $z \neq \pm R$.
   Indication : lorsque $|z| = R$, on peut écrire $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ où $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Exercice 6

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}\, z^{2n+1}.$$

   Montrer que la série est convergente si $|z| = R$.

2. Exprimer au moyen des fonctions usuelles la somme de la série dérivée sur l'intervalle $]-R, R[$. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}\, x^{2n+1}$ si $x \in]-R, R[$.

3. Calculer le nombre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 7

1. Pour tout $n \geqslant 0$, calculer l'intégrale $a_n = \int_0^{2\pi} (\cos t)^n\, dt$.
2. En déduire le développement en série entière de la fonction

$$x \mapsto \int_0^{2\pi} \exp(x\cos t)\, dt.$$

Exercice 8 Soient a et b deux nombres complexes. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \geqslant 0, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

1. Posons $M = \max(|a|, |b|, 1/2)$. Montrer par récurrence que l'on a $|u_n| \leqslant (2M)^{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$ est non nul.
3. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \frac{x}{1 - ax - bx^2}\,.$$