Université Paris 13 Année 2013-2014
L2 Analyse et Algèbre **feuille n° 6**

Intégrales

Exercice 1 On rappelle que on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$.

1. Montrer la convergence et calculer la somme des séries
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k}\right).$$
2. Montrer la convergence et calculer la somme de la série
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3-k}.$$
3. Montrer la convergence et calculer la somme de l'intégrale impropre
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{4x^3-x}.$$

Exercice 2 Étudier et, si possible, calculer les intégrales suivantes.

$$1.\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)} \qquad 2.\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \qquad 3.\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+3}$$

$$4.\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x+1}} \qquad 5.\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx \qquad 6.\ \int_1^{+\infty}(x^2+1)dx$$

$$7.\ \int_{-\infty}^{1}e^x(x^2+1)dx \qquad 8.\ \int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$$

Exercice 3 Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}\sqrt{x}}{d}x, \qquad \int_1^{\infty}x^x dx, \qquad \int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(1/x)}{\ln(1+x)}dx.$$

Exercice 4 Donner la nature et calculer les intégrales suivantes :

$$1.\ \int_1^2\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx, \qquad 2.\ \int_0^{\infty}\frac{x^5}{x^{12}+1}dx, \qquad 3.\ \int_0^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx.$$

Exercice 5 En utilisant une comparaison série-intégrale, calculer

$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}$$

Exercice 6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

Exercice 7 Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres a et b pour que les intégrales ci-dessous existent.

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b}, \qquad 2. \int_1^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt \qquad 3. \int_1^{+\infty} \frac{t^a e^{-t}}{1+t^b} dt$$

Exercice 8 Soit $\alpha > 0$ un réel positif. Pour $n \geqslant 0$, on pose

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

En utilisant le lien entre séries et intégrales, discuter la nature de la série de terme général u_n.