
Équations différentielles

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles à variables séparées ci-dessous. Dans chaque cas, trouver la solution qui vérifie la condition initiale entre parenthèses, en précisant son intervalle de définition et son intervalle image.

1. $y' = e^{x+y}$, $y(1) = -1$.
2. $xy' + y^2 = 0$, $y(1) = 1$ puis $y(-1) = -1$.
3. $xy' = 1 + e^{-y}$, $y(-1) = \ln 2$.

Exercice 2 Trouver une solution particulière, puis la solution générale des équations différentielles linéaires suivantes :

$$xy' - 2y = x^3 \text{ and } xy' + y = \ln x.$$

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre ci-dessous pour x dans l'intervalle I . Donner la solution particulière qui vérifie la condition initiale spécifiée entre parenthèses.

1. $y' + 2y = \frac{1}{e^{2x}(1+x^2)}$, $I = \mathbb{R}$, $y\frac{\pi}{4} = e^{-\frac{\pi}{2}}$
2. $(\cos x)y' - (\sin x)y = x$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{9}$.
3. $y' + \frac{y}{3} = xe^{\frac{2x}{3}}$, $I = \mathbb{R}$, $y(0) = -1$.
4. $y' + 2y = xe^{-2x}$, $I = \mathbb{R}$, $y(0) = -1$.
5. $y' - 2xy = x^3$, $I = \mathbb{R}$, $y(1) = 0$.
6. $(1-x^2)y' + xy = 1$, $I = (1, +\infty)$, $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Exercice 4 Intégrer les équations de Bernoulli suivantes :

$$-xy' + y = 2xy^2 \text{ et } xy' + y = y^3.$$

Exercice 5 Montrer que les fonctions $f(x) = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$ et $F(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^2$ admettent un développement en série entière. Dans ce qui suit, on se propose de déterminer ces développements à l'aide d'une équation différentielle.

1. Calculer $(1-x^2)f'$ et mettre en évidence une équation différentielle du premier ordre admettant pour solution $f(x)$.
2. En déduire le développement en série entière de $f(x)$ puis de $F(x)$ en précisant le rayon de convergence.

Exercice 6 Soit l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$ (équation de Bessel d'ordre 0). Trouver les fonctions développables en série entière solution de cette équation et leur rayon de convergence. Préciser la solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 7 Montrer que l'équation différentielle

$$(E) \quad 2xy' + y = \frac{1}{1+x}$$

admet une unique solution $S(x)$ développable en série entière que l'on précisera. Donner son rayon de convergence.

Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$ et en déduire une expression de $S(x)$ sur cet intervalle.

Que peut-on dire de $S(x)$ pour $x < 0$?

Exercice 8 Intégrer les équations différentielles homogènes ci-dessous.

$$y'' - 4y = 0, \quad y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y'' + y' + y = 0.$$

On précisera la solution de $y'' - 4y = 0$ telle que $y(1) = \operatorname{sh}(2)$ et $y'(1) = 2 \operatorname{ch}(2)$ ainsi que celle de $y'' + y' + y = 0$ telle que $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 9 Soit l'équation différentielle

$$(H) \quad y'' + 2y' + (1 - m)y = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

On pose $|m| = k^2$ avec $k > 0$.

1. Résoudre l'équation (H) en discutant suivant les valeurs de m .
2. Dans chaque cas, trouver une solution telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

Exercice 10 Résoudre les équations différentielles ci-dessous. On pourra chercher à résoudre l'équation homogène associée et à mettre en évidence une solution particulière.

$$y'' + y' - 2y = -2x^2 + 4x + 1, \quad y'' - y = (4x + 2)e^x, \quad y'' - y = (4x + 2)e^x + x^2$$

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}, \quad y'' + y = \cos^2 x, \quad y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin x.$$

On précisera la solution de $y'' + 2y' + y = e^{-x}$ telle que $y(0) = 0$ et $y(1) = e^{-1}$ et la solution de $y'' + y = \cos^2 x$ telle que $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Exercice 11 Résoudre l'équation différentielles

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

sur un intervalle où x ne s'annule pas. On pourra utiliser une méthode de variation de la constante.

Même exercice avec $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ pour un intervalle où $\cos x$ ne s'annule pas.