Espaces vectoriels et Applications linéaires

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leqslant 3$. On considère les trois sous-espaces vectoriels de E suivants.

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$$
$$G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$
$$H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$$

1) Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = 0\}$.
2) Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère les deux sous-ensembles H_1 et H_2 des vecteurs (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, resp. $x_1 = 0$.
1) Montrer que H_1 et H_2 sont des sous-espaces vectoriels
2) Déterminer les dimensions de H_1 et H_2
3) Construire une base pour chacun des sous-espaces H_1 et H_2
4) Calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$ et construire une base de ce sous-espace.

Exercice 3 1) Soient $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f(0) = f'(0) = 0\}$
et $G = \{x \mapsto ax + b;\ (a, b) \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2) Soient $F = \{f \in C([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0\}$ et $G = \{f \in C([-1, 1], \mathbb{C});\ f \text{ constante}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $C([-1, 1], \mathbb{C})$.
3) Soient $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n;\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$ et $u = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que H et Vect(u) sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{C}^n$.
4) Soient $E = C([0, \pi], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$ et $G = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère deux applications linéaires $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$.
1) Montrer que si $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$, alors f et g sont des projecteurs, et $\ker(f) = \ker(g)$.
2) Montrer la réciproque : si f et g sont des projecteurs, et si $\ker(f) = \ker(g)$, alors $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.

Exercice 5 Soit E le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions à valeurs réeles définies sur $\mathbb{R}$ engendré par les fonctions f_1 et f_2, où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^{2x},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2(x) = xe^{2x}.$$

1) Vérifier que (f_1, f_2) forme une base de E.

2) Montrer que la dérivation des fonctions définit une application linéaire

$$\begin{aligned} D : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto D(f) = f' \,. \end{aligned}$$

Calculer la matrice A correspondant à l'application D relativement à la base (f_1, f_2).

3) Montrer que, pour tout $f \in E$, il existe une unique fonction $F \in E$ telle que $F' = f$.

Exercice 6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose donné un entier $k > 0$ tel que $A^k = I$ et $A^{k-1} \neq I$. On pose $B = I + A + \cdots + A^{k-1}$. On note enfin u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ associés respectivement à A et B dans la base canonique.
Montrer qu'on a

$$\ker(u - id) = \mathrm{Im}(v)\,,\ \mathrm{Im}(u - id) = \ker(v)\,,\ \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(v) = \mathbb{R}^n\,.$$

Exercice 7 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) = \det(A+B)\det(A-B)$.

Exercice 8 1) Démontrer que $\mathbb{C}$ est naturellement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En déterminer la dimension et en donner une base. Décrire toutes les applications $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ qui fixent tous les nombre réels. Parmi celle ci déterminer les f qui vérifient $f(z_1z_2) = f(z_1)f(z_2)$ pour tout couple z_1, z_2 de nombres complexes.

2) Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est naturellement un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec une base canonique. Si on fixe un $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ démontrer que l'application $f : M \mapsto AM$ est linéaire. Calculer la dimension du noyau et de l'image de l'application en fonction de celle du noyau et de l'image de A. Donner une représentation matricielle de f dans la base canonique en fonction des coefficients de A.

3) Démontrer que si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel alors $V \times V$ l'est naturellement. L'application $V \times V \to V$ telle que $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ est linéaire ? Si oui, en déterminer noyau et image.

Exercice 9 Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $f = f^2$;

(ii) $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$ et f agit comme l'identité sur $\mathrm{Im} f$.

(iii) On peut trouver une base de E telle que la matrice de f dans cette base a tout les coefficients nuls sauf certains 1 sur la diagonale.

Exercice 10 Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $Id = f^2$;

(ii) $E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f + Id)$.

(iii) On peut trouver une base de E telle que la matrice de f dans cette base est diagonale avec que des 1 et des -1 sur la diagonale.

Exercice 11 Dans $\mathbb{R}^2$ on considère la rotation d'un angle θ au tour de l'origine. Remarquer que c'est une application linéaire. Ecrire cette application dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on appelera cette matrice R_θ. Déterminer par un argument géométrique et par calcul $R_\theta R_\alpha$ pour α un autre angle.