Réduction des endomorphismes

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, $a \in E$ et f un endomorphisme de E. Notons $g : E \to E$ l'application définie par $g(x) = f(x) + a$ pour tout $x \in E$. On suppose que 1 n'est pas vecteur propre de f. Montrer qu'il existe un unique vecteur x_0 tel que $g(x_0) = x_0$.

Exercice 2. Soit m un nombre réel, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ? En particulier, on précisera leur nombre.
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Supposons $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soient a, b, c, d des nombres complexes. On considère les suites récurrentes linéaires telles que

$$\begin{cases} u_{n+1} = & au_n + bv_n \\ v_{n+1} = & cu_n + dv_n \end{cases}$$

1. Ecrire matriciellement l'équation ci-dessus sous la forme $X_{n+1} = MX_n$ où $X_n = (u_n, v_n)$ et M est une matrice carrée de taille 2.

Exercice 4. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
1. À quelle condition sur a, b, c la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
2. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

Exercice 5. Notons E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit $f : E \to E$ l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P$ par $X^4 - X$.
1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Quelle est la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de E ?
3. Calculer le polynôme caractéristique de f.
4. Trouver une base de chaque sous-espace propre.

Exercice 6. Soient c, d des nombres réels non nuls. On considère les suites récurrentes linéaires telles que

$$\begin{cases} u_{n+1} = & v_n \\ v_{n+1} = & cu_n + dv_n \end{cases}$$

1. Ecrire matriciellement l'équation ci-dessus sous la forme $X_{n+1} = MX_n$ où $X_n = (u_n, v_n)$ et M est une matrice carrée de taille 2.
2. Exprimer vectoriellement (u_n, u_{n+1}) en fonction de M et de (u_0, u_1).
3. Montrer que l'espace E des suites (u_n) vérifiant $u_{n+2} = cu_n + du_{n+1}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'application $\varphi : (u_n) \mapsto (u_0, u_1)$ est une bijection linéaire. En déduire que E est de dimension 2.
5. Montrer que si M a deux valeurs propres $r_1 \neq r_2$, toute suite $u_n \in E$ s'écrit

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

6. On prend $c = d = 1$. Soit $(u_n) \in E$ telle que $u_0 = u_1 = 1$. Donner l'expression générale de u_n, et montrer que $u_n \in \mathbb{N}$.