

## ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE

Blatt 1\*, 12.10.2010

**Aufgabe 1.1.** Seien  $G$  und  $H$  zwei Gruppen, betrachtet als Kategorien  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  mit einem Objekt.

- (a) Was ist ein Funktor  $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$  ?
- (b) Gegeben zwei Funktoren  $F_1, F_2 : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ , unter welchen Bedingungen existiert eine natürliche Transformation  $\eta : F_1 \rightarrow F_2$  ?

**Aufgabe 1.2.** Sei  $\mathbf{Grp}$  die Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen, und sei  $\mathbf{Ab}$  die volle Unterkategorie der Abelschen Gruppen. Für eine Gruppe  $G$  sei  $[G, G]$  die Untergruppe von  $G$ , die von den Kommutatoren  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$  für alle  $g, h \in G$  erzeugt ist. Beweise die folgenden Aussagen:

- (a)  $[G, G]$  ist eine normale Untergruppe von  $G$ , und  $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$  ist eine Abelsche Gruppe.
- (b) Die Korrespondenz  $G \mapsto G^{\text{ab}}$  ist Teil eines Funktors  $(-)^{\text{ab}} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$  mit

$$\mathbf{Ab} \xrightarrow{\subseteq} \mathbf{Grp} \xrightarrow{(-)^{\text{ab}}} \mathbf{Ab}$$

die Identität.

**Aufgabe 1.3.** Sei  $G$  eine Gruppe und sei

$$Z(G) = \{g \in G \mid hg = gh \text{ für alle } h \in G\}$$

das Zentrum von  $G$ . Es ist klar, dass  $Z(G)$  eine Abelsche Untergruppe von  $G$  ist. Beweise, dass es keinen Funktor  $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$  mit  $F(G) = Z(G)$  gibt.

*Hinweis:* Betrachte eine Faktorisierung der Identität  $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3 \rightarrow \Sigma_2$ , wobei  $\Sigma_n$  die symmetrische Gruppe mit  $n!$  Elementen bezeichnet.

**Aufgabe 1.4.** Sei  $\mathbf{Ring}$  die Kategorie der Ringen (mit Einheit) und Homomorphismen von Ringen. Sei  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  die Inklusion.

- (a) Ist  $f$  ein Monomorphismus in  $\mathbf{Ring}$ ?
- (b) Ist  $f$  ein Epimorphismus in  $\mathbf{Ring}$ ?
- (c) Ist  $f$  ein Isomorphismus in  $\mathbf{Ring}$ ?

**Information zum Übungsbetrieb auf der Rückseite.**

---

\*Abgabe: Dienstag 19.10.2010 in der Vorlesung.

<http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie-WS10.html>

## Information zum Übungsbetrieb

Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt während der Pause der ersten Vorlesung am 12. Oktober 2010. Die Übungen finden ab der ersten Semesterwoche statt. Wir raten Ihnen, die Übungen immer zu besuchen, dort werden die Übungsaufgaben besprochen und Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen beantwortet.

Jeweils freitags ab 12 Uhr auf der Veranstaltungshomepage (siehe unten) liegt ein neues Blatt zum Herunterladen, das Sie innerhalb der darauf folgenden Woche bearbeiten sollen. Die Übungsblätter werden auch in gedruckter Form Freitags in der Vorlesung verteilt.

Die Abgabe findet 10 Tagen später beim jeweiligen Tutor (oder spätestens dienstags vor der Vorlesung im Hörsaal) statt. Beschriften Sie bitte Ihre Lösungen mit

- Ihrem Namen und Vornamen,
- dem Namen des Übungsgruppenleiters.

Es dürfen bis zu zwei Teilnehmer aus derselben Übungsgruppe gemeinsam abgeben. Die Lösungen werden dann von Ihrem Übungsgruppenleiter korrigiert und in der nächsten Übungsgruppe zurückgegeben.

Voraussichtlich gibt es für jedes Aufgabenblatt 20 Punkte, die sich gleichmäßig auf die 4 oder 5 Aufgaben verteilen. Voraussetzungen für die Zulassung zur Prüfung sind

- mehr als die Hälfte der Übungen aus den Übungsblättern gelöst eingereicht zu haben,
- mindestens dreimal eine Übung an der Tafel vor der Übungsgruppe präsentiert zu haben.

Die Homepage der Veranstaltung, mit weiterer Information, finden Sie unter

<http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie-WS10.html>

Fragen, Kommentare und Anregungen sind willkommen! Melden Sie sich einfach während der Vorlesung oder kommen Sie zur Sprechstunde (dienstags 13-14 Uhr, Büro 507). Wir können auch gerne einen anderen Termin in der Vorlesung oder per E-mail vereinbaren.

E-mail: [ausoni@uni-muenster.de](mailto:ausoni@uni-muenster.de)

**Wir wünschen Ihnen weiterhin viel Erfolg im Studium !**