Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Wintersemester 2010/11

ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE

Blatt 10*, 10.12.2010

Aufgabe 10.1. Sei $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ die Kategorie der Kettenkomplexen von Abelschen Gruppen, und sei $\mathbf{Gr}(\mathbf{Ab})$ die Kategorie der graduierten Abelschen Gruppen. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Kategorien $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ und $\mathbf{Gr}(\mathbf{Ab})$ besitzen beliebige Koprodukte.
(b) Der Homologie-Funktor $H_* : \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Gr}(\mathbf{Ab})$ erhält Koprodukte.

Aufgabe 10.2. Sei $(X, A) \in \mathbf{Top}^2$. Wir definieren die Gruppen der relativen n-Zykeln (mod A) und der relativen n-Ränder (mod A) durch

$$Z_n(X, A) = \{\alpha \in S_n(X) \,|\, d(\alpha) \in S_{n-1}(A)\} \text{ und}$$
$$B_n(X, A) = B_n(X) + S_n(A)\,.$$

Beweise die folgenden Aussagen.

(a) $B_n(X, A) \subset Z_n(X, A)$.
(b) Ein natürlicher Isomorphismus $\frac{Z_n(X,A)}{B_n(X,A)} \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; \mathbb{Z})$ existiert.

Aufgabe 10.3. Sei $(X, A) \in \mathbf{Top}^2$ gegeben, so dass A ein Retrakt von X ist (also: eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $ri = \mathrm{id}_A$ existiert, wobei $i : A \to X$ die Inklusion ist). Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Wir haben in $\mathbf{Gr}(\mathbf{Ab})$ ein Isomorphismus
$$H_*(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_*(A; \mathbb{Z}) \oplus H_*(X, A; \mathbb{Z})\,.$$
(b) Ist A sogar ein Deformationsretrakt (also $ir \simeq \mathrm{id}_X$ (rel A) gilt zusätzlich), so folgt $H_*(X, A; \mathbb{Z}) = 0$.
Bemerkung: Sind A, B, C Abelsche Gruppen mit $A \cong B$ und $A \cong B \oplus C$, so folgt nicht, dass $C = 0$. Finde einen Gegenbeispiel.

Aufgabe 10.4. Sei $(X, A) \in \mathbf{Top}^2$. Definiere

$$W(X, A) = \{X_\lambda \in \pi_0(X) \,|\, X_\lambda \cap A = \emptyset\}\,,$$

wobei $\pi_0(X)$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X ist. Beweise: die Funktoren $H_0(-; \mathbb{Z})$ und $\mathbb{Z}\{W(-)\} : \mathbf{Top}^2 \to \mathbf{Ab}$ sind natürlich isomorph.

---

*Abgabe: Montag 20.12.2010 **bis 12 Uhr**.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie-WS10.html`