Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Wintersemester 2010/11

ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE

Blatt 11* 20.12.2010

Aufgabe 11.1. Sei $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ die Kategorie der Ketten-Komplexen von Abelschen Gruppen. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Ketten-Homotopie Relation $f_* \simeq g_*$ auf $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})(C_*, D_*)$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Gelten $f_* \overset{H}{\simeq} g_*$ in $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})(C_*, D_*)$ und $f'* \overset{H'}{\simeq} g'_*$ in $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})(D_*, E_*)$ so gilt $f'_* f_* \overset{K}{\simeq} g'_* g_*$ in $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})(C_*, E_*)$. Gib eine Formel für K an.

(c) Ein Morphismus von Ketten-Komplexen $f_* : C_* \to D_*$ in $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$, der ein Isomorphismus in Homologie induziert, nennen wir einen *Quasi-Isomorphismus*. Zeige, dass ein Quasi-Isomorphismus nicht notwendigerweise eine Ketten-Homotopieäquivalenz ist.

Bemerkung: Sind C_n und D_n freie Abelsche Gruppen für alle $n \in \mathbb{Z}$, so ist jeder Quasi-Isomorphismus $f_* : C_* \to D_*$ eine Ketten-Homotopieäquivalenz.

Aufgabe 11.2. Beweise Lemma 5.51 aus der Vorlesung: Gegeben sei ein kommutatives Diagram in $\mathbf{Ab}$ mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "f_n"'] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "g_n"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "h_n"'] & A_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & A'_n \arrow[r, "i'_n"] & B'_n \arrow[r, "p'_n"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r, "i'_{n-1}"] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

sodass h_n ein Isomorphismus für alle n ist. Sei $D_n = \partial_n h_n^{-1} p'_n : B'_n \to A_{n-1}$. Dann ist die folgende lange Folge exakt:

$$\cdots \to A_n \xrightarrow{(f_n, i_n)} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{i'_n - g_n} B'_n \xrightarrow{D_n} A_{n-1} \to \cdots .$$

Aufgabe 11.3. Sei X ein Raum, seien $U_1, U_2, U_3 \subset X$ Teilräumen. Sei angenommen dass die Räumen U_i, $U_j \cap U_k$, und $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ leer oder zusammenziehbar sind für alle $1 \leq i, j, k \leq 3$. Beweise, dass $H_n(X; \mathbb{Z}) = 0$ für $n \geq 2$.

Bitte wenden.

*Abgabe: Montag 10.01.2011 **bis 12 Uhr**.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie-WS10.html`
Jetzt im Sonderangebot: 6ÜLP/20 pro Aufgabe!

Aufgabe 11.4. Betrachte die folgeneden Teilräume von $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x_1 \leq (2\pi)^{-1}\} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$C = \{x \in X, \,|\, x_1 = 0, \quad x_2 \geq -1\} \cup \{x \in X, \,|\, x_1 > 0, x_2 \geq \sin(1/x)\} \subset X$$
$$D = \{x \in X, \,|\, x_1 = 0, \quad x_2 \leq 1\} \cup \{x \in X, \,|\, x_1 > 0, \quad x_2 \leq \sin(1/x)\} \subset X.$$

Beweise die folgenden Aussagen.

(a) C und D sind in X abgeschlossen und $X = C \cup D$.

(b) Die "Mayer-Vietoris" Folge

$$\cdots \to H_n(C \cap D; \mathbb{Z}) \to H_n(C; \mathbb{Z}) \oplus H_n(D; \mathbb{Z}) \to H_n(X; \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(C \cap D; \mathbb{Z}) \to \cdots .$$

ist nicht exakt.

Aufgabe 11.5. Berechne $H_*(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$.

Aufgabe 11.6. Seien $X = S^1 \times S^1$ und $Y = S^1 \vee S^1 \vee S^2$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Fundamentalgruppen von X und Y sind nicht isomorph (insbesondere sind X und Y nicht Homotopieäquivalent).

(b) Die Homologiegruppen von X und Y sind isomorph.

(c) Sind $\widetilde{X}$ und $\widetilde{Y}$ die Universellen Überlagerungen von X, bzw. Y, so sind die Homologiegruppen von $\widetilde{X}$ und $\widetilde{Y}$ nicht isomorph.

Hinweis: Vergleiche mit Aufgabe 6.4.

Frohe Festtage und einen guten Rutsch ins neues Jahr !