Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Wintersemester 2010/11

ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE

Blatt 12*, 10.01.2011

Aufgabe 12.1. Sei $k \in \mathbb{Z}$ und sei $d_k : S^1 \to S^1$ durch $d_k(z) = z^k$ definiert. Sei $m \geq 0$ und sei $\Sigma^m d_k : S^{m+1} \to S^{m+1}$ die iterierte Einhängung von d_k, wobei wir $\Sigma^m S^1$ und S^{m+1} identifiziert haben. Beweise, dass der Grad von $\Sigma^m d_k$ durch $\deg(\Sigma^m d_k) = k$ gegeben ist.

Aufgabe 12.2. Sei $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 1$ gegeben. Beweise, dass die Abbildung $GL_\ell(\mathbb{R}) \to \{\pm 1\}$, $A \mapsto \det(A)/|\det(A)|$ eine Bijektion

$$\pi_0(GL_\ell(\mathbb{R}), 1) \to \{\pm 1\}$$

induziert.

Aufgabe 12.3. Sei $n \geq 1$, und sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein linearer Isomorphismus. Sei $\phi_f : S^n \to S^n$ durch $\phi_f(x) = f(x)/\|f(x)\|$ definiert. Beweise (mit Hilfe von Aufgaben 12.1 und 12.2), dass $\deg(\phi_f) = \det(f)/|\det(f)|$.

Aufgabe 12.4. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Definiere ihren Abbildungskegel als das punktierte Quotientenraum

$$C(f) = \big(Y \sqcup (X \times [0,1])\big)/\sim\,,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die von $f(x) \sim (x, 0)$ und $(z, 1) \sim (z', 1)$ für alle $x, z, z' \in X$ erzeugt ist. Der Basispunkt von $C(f)$ ist die Klasse von $X \times \{1\}$. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) $f_* : H_n(X; \mathbb{Z}) \to H_n(Y; \mathbb{Z})$ ist ein Isomorphismus für alle $n \geq 0$.
(b) $\widetilde{H}_n(C(f); \mathbb{Z}) = 0$ für alle $n \geq 0$.

---

*Abgabe: Montag 17.01.2011 **bis 12 Uhr**.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie-WS10.html`