Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Wintersemester 2010/11

ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE

Blatt 2*, 15.10.2010

Aufgabe 2.1. Seien $(P, \leq)$ und $(Q, \leq)$ zwei Quasi-geordnete Mengen, die wir als kleine Kategorien $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ auffassen.

(a) Beschreibe die Funktoren $\mathbf{P} \to \mathbf{Q}$.
(b) Gegeben zwei Funktoren $F, G : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$, unter welchen Bedingungen existiert eine natürliche Transformation $F \Rightarrow G$? Wieviele solche Transformationen gibt es dann?

Aufgabe 2.2. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie, und für $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, sei $\varphi^X = \mathbf{C}(X, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ der von X kodargestellte Funktor. Ferner sei $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, und sei $\eta : \varphi^X \Rightarrow \varphi^Y$ eine natürliche Transformation.

(a) Beweise, dass genau ein $f \in \mathbf{C}(Y, X)$ mit $\eta = \varphi^f$ existiert. Hier ist φ^f durch $\varphi^f_Z : \mathbf{C}(X, Z) \to \mathbf{C}(Y, Z)$, $g \mapsto g \circ f$ definiert.
(b) Formuliere und beweise die entsprechende "duale" Aussage (für dargestellte Kofunktoren).

Aufgabe 2.3. Betrachte die folgenden Teilräume von $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad X = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \dots\}, \quad Y = X \cup \{0\}.$$

(a) Welche sind homöomorph?
(b) Welche haben den selben Homotopietyp?

Aufgabe 2.4. Sei $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$ die n-Sphäre, versehen mit der Teilraumtopologie des Euklidischen $\mathbb{R}^{n+1}$. Als Basispunkt von S^n wählen wir $s_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Sei $f : S^n \to S^n$ eine (nicht notwendigerweise punktierte) Abbildung. Zeige: gilt $n \geq 1$, so ist f homotop zu einer Abbildung $g : S^n \to S^n$ mit $f(s_0) = s_0$.

Aufgabe 2.5. Sei (S^n, s_0) die punktierte n-Sphäre. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Sei X ein punktierter Raum. Dann sind X und $S^0 \wedge X$ homöomorph.
(b) S^{n+1} und $S^1 \wedge S^n$ sind für alle $n \geq 0$ homöomorph.

---

*Abgabe: Montag 25.10.2010.
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie-WS10.html