Ch. Ausoni, M. Röer

ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE

Blatt 4*, 29.10.2010

Aufgabe 4.1. Sei X ein Weg-zusammenhängender Raum und $a, b \in X$. Beweise, dass $\pi_1(X, a)$ genau dann Abelsch ist, wenn für alle $\sigma, \tau \in \Omega(X; a, b)$ die Homomorphismen

$$T_{[\sigma]} \text{ und } T_{[\tau]} : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b)$$

gleich sind.

Aufgabe 4.2. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Ein $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_*$ existiert, mit $\pi_1(X, x_0) \neq 0$.
(b) $\pi_1(S^1, 1) \neq 0$.

Aufgabe 4.3. Sei X ein Raum, und sei $A \subset X$ ein Retrakt von X (also existiert eine stetige Abbildung $r : X \to A$, sodass $A \subset X \xrightarrow{r} A$ die Identität ist).

(a) Nehmen wir an, dass X das Trennungsaxiom T_1 erfüllt (also: die Punkten in X sind abgeschlossen). Seien $a \neq b \in X$. Unter welchen Bedingungen ist $\{a, b\}$ ein Retrakt von X?
(b) Zeige: Ist X Hausdorffsch, so ist A ein abgeschlossener Teilraum von X.

Aufgabe 4.4. Sei $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_*$ und $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. Sei $\bar{\alpha} \in \mathbf{Top}_*((S^1, 1), (X, x_0))$ die einzige Abbildung mit $\alpha = \bar{\alpha} \circ q$, wobei q die Quotientenabbildung $[0, 1] \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist. Ferner sei $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ die Kreisscheibe, mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{C}$ versehen. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Es gilt $\alpha \sim c_{x_0}$ in $\Omega(X, x_0)$.
(b) Eine Erweiterung $h : D^2 \to X$ von $\bar{\alpha} : S^1 \to X$ existiert. In anderen Worten: eine Abbildung $h \in \mathbf{Top}(D^2, X)$ existiert, mit $\bar{\alpha} = h \circ j$, wobei $j : S^1 \to D^2$ die Inklusion ist.

Aufgabe 4.5. Sei $(G, \star)$ eine topologische Gruppe mit e als neutralem Element. Sei c_e die konstante Schleife in G mit Bild $\{e\}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Operation $\Omega(G, e) \times \Omega(G, e) \to \Omega(G, e)$, die durch $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$ mit $(\alpha * \beta)(t) = \big(\alpha(t)\big) \star \big(\beta(t)\big)$ für alle $t \in [0, 1]$ gegeben ist, definiert eine Gruppenstruktur auf $\Omega(G, e)$ mit c_e als neutralem Element.
(b) Die Operation $\pi_1(G, e) \times \pi_1(G, e) \to \pi_1(G, e)$, $([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ ist wohldefiniert und ist eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(G, e)$.
(c) Es gilt $[\alpha][\beta] = [\alpha] * [\beta]$ für alle $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G, e)$ (Hinweis: berechne $[\alpha c_e] * [c_e \beta]$).
(d) Die Gruppe $\pi_1(G, e)$ ist Abelsch.

*Abgabe: Montag 8.11.2010 **bis 12 Uhr**.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie-WS10.html`