Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Wintersemester 2010/11

ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE

Blatt 5*, 05.11.2010

Aufgabe 5.1. Sei $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Topologie versehen. Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung der Kreise mit Mittelpunkt $(0, \frac{1}{n})$ und Radius $\frac{1}{n}$ in $\mathbb{R}^2$ für alle $n \geq 1$, versehen mit der Teilraumtopologie (die sog. hawaiischen Ohrringe). Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Ein surjektiver Homomorphismus $\pi_1(B, 0) \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ existiert.
(b) Die Gruppe $\pi_1(B, 0)$ ist nicht abzählbar.

Aufgabe 5.2. Sei X ein Raum, U_1 und U_2 offene Teilmengen mit $X = U_1 \cup U_2$ und U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend. Seien $i : U_1 \cap U_2 \to X$, $i_k : U_1 \cap U_2 \to U_k$ und $j_k : U_k \to X$ die Inklusionen ($k = 1, 2$). Sei $x_0 \in U_1 \cap U_2$ gewählt. Beweise die folgenden Varianten des Satzes von Seifert-Van Kampen.

(a) Nehmen wir an, dass $i_* : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ trivial ist. Dann induzieren j_1 und j_2 einen Isomorphismus von Gruppen

$$(\pi_1(U_1, x_0)/N_1) * (\pi_1(U_2, x_0)/N_2) \to \pi_1(X, x_0)\,,$$

wobei N_k die normale Untergruppe von $\pi_1(U_k, x_0)$ ist, die von $(i_k)_*(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0))$ erzeugt ist.

(b) Nehmen wir an, dass $(i_2)_* : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi_1(U_2, x_0)$ surjektiv ist. Dann induziert $(j_1)_*$ einen Isomorphismus von Gruppen

$$\pi_1(U_1, x_0)/M \to \pi_1(X, x_0)\,,$$

wobei M die normale Untergruppe von $\pi_1(U_1, x_0)$ ist, die von $(i_1)_*(\mathrm{Kern}(i_2)_*)$ erzeugt ist.

Aufgabe 5.3. Beweise mit Hilfe vom Satz von Seifert-Van Kampen, dass $\pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1))$ und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ isomorph sind.

Aufgabe 5.4. Verwende den Satz von Seifert-Van Kampen, um $\pi_1(\mathbb{R}P^2, *)$ zu bestimmen, wobei $\mathbb{R}P^2$ die reelle projektive Ebene ist.

*Abgabe: Montag 15.11.2010 **bis 12 Uhr**.
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie-WS10.html