Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Wintersemester 2010/11

ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE

Blatt 8*, 26.11.2010

Aufgabe 8.1. Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung, und sei $f : Y \to X$ stetig. Sei f^*E der Teilraum von $Y \times E$, der durch $f^*E = \{(y, e) \mid f(y) = p(e)\}$ definiert ist. Sei $q : f^*E \to Y$ die Einschränkung der Projektion $Y \times E \to Y$. Beweise, dass $q : f^*E \to Y$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 8.2. Seien $q : F \to E$ und $p : E \to X$ Überlagerungen, so dass mindestens eine der folgenden Eigenschaften gilt:

(a) Für alle $x \in X$ ist $p^{-1}(x)$ endlich.
(b) X besitzt eine universelle Überlagerung.

Beweise, dass $pq : F \to X$ dann eine Überlagerung ist.

Aufgabe 8.3. Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ der 2-dimensionale Torus mit Basis-Punkt $x_0 = (1, 1)$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Betrachte $\mathbb{Z}^2$ als diskrete Untergruppe der topologischen Gruppe $\mathbb{R}^2$. Dann existiert ein Homöomorphismus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$, und die kanonische Projektion $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist eine universelle Überlagerung.
(b) $\pi_1(T, x_0)$ und $\mathbb{Z}^2$ sind Isomorph.
(c) Ist $\varphi : \pi_1(T, x_0) \to \pi_1(T, x_0)$ ein Isomorphismus von Gruppen, so existiert ein Homöomorphismus $f : T \to T$ mit $f(x_0) = x_0$ und mit $f_* = \varphi : \pi_1(T, x_0) \to \pi_1(T, x_0)$.

Theorem (Borsuk-Ulam): *Ist $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, so existiert $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Aufgabe 8.4. Wir beweisen (unter anderem) das obige Theorem für $n = 0, 1, 2$. Sei $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, und sei $d_k : S^1 \to S^1$ die Abbildung aus Aufgabe 6.2.(c). Sei $h : S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung mit $h(1) = 1$ und $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in S^1$.

(a) Zeige, dass eine stetige Abbildung $\bar{h} : S^1 \to S^1$ mit $d_2 h = \bar{h} d_2$ existiert:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "d_2"'] & S^1 \arrow[d, "d_2"] \\ S^1 \arrow[r, "\bar{h}"] & S^1 . \end{tikzcd}$$

(b) Beweise, dass $\bar{h}_* : \pi_*(S^1, 1) \to \pi_*(S^1, 1)$ injektiv ist.
(c) Bestimme $(d_k)_* : \pi_*(S^1, 1) \to \pi_*(S^1, 1)$.
(d) Beweise, dass $h_* : \pi_*(S^1, 1) \to \pi_*(S^1, 1)$ injektiv ist. Insbesondere ist h nicht null-homotop (also nicht homotop zu einer konstanten Abbildung).
(e) Sei $f : S^2 \to S^1$ stetig. Zeige, dass ein $x \in S^2$ existiert mit $f(-x) \neq -f(x)$.
Hinweis: Betrachte die Einschränkung von f auf den Äquator $S^1 = S^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, und zeige, dass sie null-homotop ist.
(f) Beweise das Theorem von Borsuk-Ulam für $n = 0, 1$ und 2.
Hinweis: gilt $f(x) \neq f(-x)$, so betrachte $\frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$.

---

*Abgabe: Montag 6.12.2010 **bis 12 Uhr**.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie-WS10.html`