ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 1*, 10.10.2008

Aufgabe 1.1. Sei p eine Primzahl, und sei $v_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ durch

$$v_p(z) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} \,|\, p^n \text{ teilt } z\} & \text{falls } z \neq 0\,, \\ \infty & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

definiert. Sei $d_p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die durch $d_p(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$ definiert ist (wobei $p^{-\infty} = 0$). Beweise, dass d_p eine Metrik ist.

Definition. Die Metrik d_p auf $\mathbb{Z}$ heißt die p-adische Metrik.

Aufgabe 1.2. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, und sei $\mathbb{Z}$ mit der p-adischen Metrik d_p versehen. Sei $\ell \in \mathbb{Z}$ eine beliebige Zahl.

(a) Ist die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x + \ell$ stetig ?
(b) Ist die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \ell x$ stetig ?
(c) Unter welchen Bedingungen an ℓ konvergiert die Folge $\{\ell^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ nach $0 \in \mathbb{Z}$?
(d) Sei q eine Primzahl mit $q \neq p$. Sind die Metriken d_p und d_q auf $\mathbb{Z}$ äquivalent ?

Aufgabe 1.3. Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume. Sei $d_\infty : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die durch

$$d_\infty\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$$

definiert ist.

(a) Beweise, dass d_∞ eine Metrik auf $X \times Y$ definiert.
(b) Sei nun $(X, d) = (Y, d')$, und sei $X \times X$ mit der Metrik d_∞ versehen. Ist die Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig ?

Aufgabe 1.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien $d', d'' : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, y) + 1} \quad \text{und} \quad d''(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

definiert.

(a) Beweise, dass d' eine Metrik auf X definiert.
(b) Beweise, dass d'' eine Metrik auf X definiert.
(c) Beweise, dass d, d' und d'' als Metrik äquivalent sind.

Aufgabe 1.5. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Hat X mehr als ein Element, so existiert ein metrischer Raum Y und eine Abbildung $f : Y \to X$, die nicht stetig ist.
(b) Ist d die diskrete Metrik auf X und ist Y ein beliebiger metrischer Raum, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

Bitte lesen Sie die Information zum Übungsbetrieb auf der Rückseite.

*Abgabe: Montag 20.10.2008 vor der Vorlesung.

Information zum Übungsbetrieb

Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt im Anschluss an die erste Vorlesung am 13. Oktober 2008. Die Übungen finden ab der ersten Semesterwoche statt. Wir raten Ihnen, die Übungen regelmäßig zu besuchen, dort werden die Übungsaufgaben besprochen und Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen beantwortet.

Jeweils freitags um 16 Uhr auf der Veranstaltungshomepage (siehe unten) liegt ein neues Blatt zum Herunterladen, das Sie innerhalb der darauf folgenden Woche bearbeiten sollen. Die Übungsblätter werden auch in gedruckter Form montags nach der Vorlesung verteilt.

Die Abgabe findet montags vor der Vorlesung im Hörsaal statt. Beschriften Sie bitte Ihre Lösungen mit

- Ihrem Namen und Vornamen,
- dem Namen des Übungsgruppenleiters.

Es dürfen bis zu drei Teilnehmer aus derselben Übungsgruppe gemeinsam abgeben. Die Lösungen werden dann von Ihrem Übungsgruppenleiter korrigiert und in der nächsten Übungsgruppe zurückgegeben.

Voraussichtlich gibt es für jedes Aufgabenblatt 20 Punkte, die sich gleichmäßig auf die Aufgaben verteilen. Voraussetzungen für die Zulassung zur Prüfung oder für die Scheinerwerbung sind

- mehr als die Hälfte der Übungen aus den Übungsblättern gelöst eingereicht zu haben,
- mindestens dreimal eine Übung an der Tafel vor der Übungsgruppe präsentiert zu haben.

Die Homepage der Veranstaltung, mit weiterer Information, finden Sie unter

`http://www.math.uni-bonn.de/people/ausoni/topologie1.html`

Wir wünschen Ihnen weiterhin viel Erfolg im Studium !