ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 10*, 12.12.2008

Aufgabe 10.1. Sei X ein Raum und $\alpha : [0,1] \to X$ ein Weg in X. Sei $\phi : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Abbildung mit $\phi(0) = 0$ und $\phi(1) = 1$. Beweise, dass α und $\alpha \circ \phi$ homotop relativ zu den Endpunkten sind.

Aufgabe 10.2. Sei X ein Weg-zusammenhängender Raum und $a, b \in X$. Beweise, dass $\pi_1(X,a)$ genau dann Abelsch ist, wenn für alle $\sigma, \tau \in \Omega(X; a, b)$ die Homomorphismen

$$T_\sigma \ \text{ und } \ T_\tau : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b)$$

gleich sind.

Aufgabe 10.3. Sei X ein Raum, A ein Retrakt von X (Aufgabe 9.4) und $a_0 \in A$. Beweise, dass es eine spaltende kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to N \to \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(A, a_0) \to 1$$

gibt.

Aufgabe 10.4. Seien $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ und $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$ der Kreis und die Kreisscheibe, mit der Teilraumtopologie versehen. Sei $1 \in \mathbb{C}$ als Basispunkt von S^1 gewählt. Sei

$$q : [0,1] \to S^1$$

die Quotientenabbildung, die durch $q(t) = e^{2t\pi i}$ gegeben ist. Ferner sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Jede Schleife $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ faktorisiert als $\alpha = \bar{\alpha} \circ q$ für eine stetige Abbildung $\bar{\alpha} : S^1 \to X$, und $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ definiert eine bijektive Abbildung von $\Omega(X, x_0)$ in die Menge der stetigen punktierten Abbildungen $(S^1, 1) \to (X, x_0)$.

(b) Es gilt $\alpha \sim c_{x_0}$ in $\Omega(X, x_0)$ genau dann, wenn es eine Erweiterung $h : D^2 \to X$ von $\bar{\alpha} : S^1 \to X$ gibt (also $\bar{\alpha} = h \circ j$, wobei $j : S^1 \to D^2$ die Inklusion ist).

Aufgabe 10.5. Sei $(G, \star)$ eine topologische Gruppe mit e als neutralem Element. Sei c_e die konstante Schleife in G mit Bild $\{e\}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Operation $\Omega(G,e) \times \Omega(G,e) \to \Omega(G,e)$, die durch $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$ mit $(\alpha * \beta)(t) = \big(\alpha(t)\big) \star \big(\beta(t)\big)$ für alle $t \in [0,1]$ gegeben ist, definiert eine Gruppenstruktur auf $\Omega(G,e)$ mit c_e als neutralem Element.

(b) Die Operation $\pi_1(G,e) \times \pi_1(G,e) \to \pi_1(G,e)$, $([\alpha],[\beta]) \mapsto [\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ ist wohldefiniert und ist eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(G,e)$.

(c) Es gilt $[\alpha][\beta] = [\alpha] * [\beta]$ für alle $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G,e)$ (Hinweis: berechne $[\alpha c_e] * [c_e \beta]$).

(d) Die Gruppe $\pi_1(G,e)$ ist Abelsch.

Vorsetzung auf der Rückseite.

---
*Abgabe: Montag 5.01.2009 vor der Vorlesung.

Aufgabe 10.6 (Widerholungsaufgabe)**.** Betrachte die folgenden Eigenschaften:

(1) zusammenhängend,
(2) Weg-zusammenhängend,
(3) kompakt,
(4) lokal-kompakt Hausdorff,
(5) Hausdorff,
(6) regulär,
(7) vollständig regulär,
(8) normal,
(9) erst-abzählbar,
(10) zweit-abzählbar,
(11) Lindelöf,
(12) Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge,
(13) metrisierbar.

Welche dieser Eigenschaften bleiben durch die folgenden Konstruktionen erhalten ?

(a) Teilraum,
(b) offener Teilraum,
(c) abgeschlossener Teilraum,
(d) endliches Produkt,
(e) abzählbares Produkt,
(f) allgemeines Produkt,
(g) Bild einer stetigen Abbildung,
(h) Quotient.

Welche dieser Eigenschaften haben die folgenden Räume ?

(i) Ein metrischer Raum,
(j) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie,
(k) Die Räume A, B und C aus Aufgabe 5.5,
(l) $\mathbb{R}_\ell$ und $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$.

Bemerkung: Manche dieser Fragen wurden nicht früher bearbeitet. Beantworte so viele, wie du möchtest.

Frohe Festtage und einen guten Rutsch ins neues Jahr !