ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 11*, 2.01.2009

Aufgabe 11.1. Sei X ein nicht leerer Weg-zusammenhängender Raum. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) X ist einfach-zusammenhängend.
(b) Jede stetige Abbildung $S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
(c) Jede stetige Abbildung $S^1 \to X$ hat eine Erweiterung $D^2 \to X$.

Sei Y ein nicht leerer Raum. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Y ist einfach-zusammenhängend.
(b) Für jedes Paar $f, g : S^1 \to Y$ von stetigen Abbildungen gilt, dass f und g homotop sind.

Aufgabe 11.2. Sei $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$ und sei $A \subset X$ durch

$$A = \{(x, y) \in X \mid \big((x + 1)^2 + y^2 - 1\big)\big((x - 1)^2 + y^2 - 1\big) = 0\}$$

definiert (also ist A die Vereinigung der Kreise mit Radius 1 und Zentrum a und b). Seien A und X mit der Topologie eines Teilraums des Euklidischenraums $\mathbb{R}^2$ versehen. Beweise, dass A ein Deformationsretrakt von X ist.

Aufgabe 11.3. Sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e, und sei $\Gamma \subset G$ eine Teilgruppe.

(a) Beweise, dass Γ genau dann eine diskrete Teilmenge von G ist, wenn es eine offene Umgebung U von e in G mit $U \cap \Gamma = \{e\}$ gibt.
(b) Sei angenommen, dass Γ eine diskrete Teilgruppe von G ist. Die Gruppe Γ wirkt rechts (bzw. links) auf G durch Multiplikation, und sei G/Γ (bzw. $\Gamma\backslash G$) die Menge der Bahnen dieser Wirkung, mit der Quotiententopologie versehen. Beweise, dass die kanonischen Projektionen $G \to G/\Gamma$ und $G \to \Gamma\backslash G$ Überlagerungen sind.

Aufgabe 11.4. Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Beweise, dass die Abbildung $d_k : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^k$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 11.5. Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ist B entweder
- Hausdorff,
- regulär,
- vollständig-regulär, oder
- lokal-kompakt Hausdorff,

dann ist es E ebenso.
(b) Ist B kompakt und ist $p^{-1}(\{b\})$ endlich für alle $b \in B$, so ist E kompakt.

*Abgabe: Montag 12.01.2009 vor der Vorlesung.