ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 12*, 9.01.2009

Aufgabe 12.1. Seien $p : E \to X$ und $p' : E' \to X$ zwei Überlagerungen eines Raums X, und sei $\phi : E \to E'$ ein Morphismus von Überlagerungen. Beweise, dass ϕ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 12.2. Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$, die von

$$(x, y) \sim (x, y + 1) \quad \text{und} \quad (x, y) \sim (x + 1, -y)$$

erzeugt ist. Sei K der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\sim$ und sei $p : \mathbb{R}^2 \to K$ die kanonische Quotientenabbildung. Beweise, dass p eine Überlagerung ist.

Definition. Der Raum K heißt die *Kleinsche Flasche*.

Aufgabe 12.3. Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung, wobei X Weg-zusammenhängend ist. Beweise, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(a) E ist Weg-zusammenhängend.
(b) Für jeden Punkt $x_0 \in X$ ist die Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$ transitiv.
(c) Es gibt einen Punkt $x_0 \in X$, so dass die Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$ transitiv ist.

Aufgabe 12.4. Sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element 1, und sei

$$p : E \to G$$

eine Überlagerung mit E zusammenhängend und lokal Weg-zusammenhängend. Sei $e \in p^{-1}(1)$ gewählt. Beweise, dass es auf E eine einzige Gruppenstruktur mit e als neutralem Element gibt, so dass E mit seiner Topologie eine topologische Gruppe ist, und p ein Homomorphismus von Gruppen ist. Ist G Abelsch, so ist E auch Abelsch.

Aufgabe 12.5. Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, und sei $d_k : S^1 \to S^1$ die Abbildung aus Aufgabe 11.4. Sei $h : S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung mit $h(1) = 1$ und $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in S^1$.

(a) Zeige, dass eine stetige Abbildung $\bar{h} : S^1 \to S^1$ mit $d_2 h = \bar{h} d_2$ existiert:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "d_2"'] & S^1 \arrow[d, "d_2"] \\ S^1 \arrow[r, "\bar{h}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

(b) Sei α ein Weg von 1 nach -1 in S^1. Beweise, dass $[d_2\alpha] \neq 0$ in $\pi_*(S^1, 1)$ gilt.
(c) Beweise, dass $\bar{h}_* : \pi_*(S^1, 1) \to \pi_*(S^1, 1)$ injektiv ist.
(d) Bestimme $(d_k)_* : \pi_*(S^1, 1) \to \pi_*(S^1, 1)$.
(e) Beweise, dass $h_* : \pi_*(S^1, 1) \to \pi_*(S^1, 1)$ injektiv ist.

---

*Abgabe: Montag 19.01.2009 vor der Vorlesung.