ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 13*, 16.01.2009

Aufgabe 13.1. Sei X ein nicht leerer, zusammenhängender und lokal Weg-zusammenhängender Raum. Sei $x_0 \in X$, und sei angenommen, dass $\pi_1(X, x_0)$ eine endliche Gruppe ist. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Jede stetige Abbildung $f : X \to S^1$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
(b) Für $n \geq 2$ sind S^n und $\mathbb{R}P^n$ Beispiele von solchen X.

Aufgabe 13.2. Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung, und sei $f : Y \to X$ stetig. Sei f^*E der Teilraum von $Y \times E$, der durch $f^*E = \{(y, e) \,|\, f(y) = p(e)\}$ definiert ist. Sei $q : f^*E \to Y$ die Einschränkung der Projektion $Y \times E \to Y$. Beweise, dass $q : f^*E \to Y$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 13.3. Seien $q : F \to E$ und $p : E \to X$ Überlagerungen, so dass mindestens eine der folgenden Eigenschaften gilt:

(a) Für alle $x \in X$ ist $p^{-1}(x)$ endlich.
(b) X besitzt eine universelle Überlagerung.

Beweise, dass $pq : F \to X$ dann eine Überlagerung ist.

Aufgabe 13.4. Sei $T^2 = S^1 \times S^1$ der 2-dimensionale Torus mit Basis-Punkt $x_0 = (1, 1)$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Betrachte $\mathbb{Z}^2$ als diskrete Untergruppe der topologischen Gruppe $\mathbb{R}^2$. Dann existiert ein Homöomorphismus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$, und die kanonische Projektion $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist eine universelle Überlagerung.
(b) $\pi_1(T, x_0)$ und $\mathbb{Z}^2$ sind Isomorph.
(c) Ist $\varphi : \pi_1(T, x_0) \to \pi_1(T, x_0)$ ein Isomorphismus von Gruppen, so existiert ein Homöomorphismus $f : T \to T$ mit $f(x_0) = x_0$ und mit $f_* = \varphi : \pi_1(T, x_0) \to \pi_1(T, x_0)$.

Aufgabe 13.5. Diese Aufgabe ist ein Fortsetzung der Aufgabe 12.5. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ist $h : S^1 \to S^1$ stetig mit $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in S^1$, so ist h nicht null-homotop (also nicht homotop zu einer konstanten Abbildung).
(b) Sei $f : S^2 \to S^1$ stetig. Dann gibt es $x \in S^2$ mit $f(-x) \neq -f(x)$.
Hinweis: Betrachte die Einschränkung von f auf dem Äquator $S^1 = S^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\})$, und zeige, dass sie null-homotop ist.
(c) Beweise den folgenden Satz für $n = 0, 1$ und 2.
Theorem von Borsuk-Ulam. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, so existiert $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.*
Hinweis: gilt $f(x) \neq f(-x)$, so betrachte $\frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$.

*Abgabe: Montag 26.01.2009 vor der Vorlesung.