ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 14*, 23.01.2009

Aufgabe 14.1. Sei X ein Hausdorff Raum und sei G eine endliche Untergruppe der Homöomorphismengruppe von X. Sei $1 \in G$ die Identität von X. Sei angenommen, dass die Wirkung von G auf X frei ist (also falls $g \in G$ und ein $x \in X$ mit $g(x) = x$ existiert, dann gilt $g = 1$). Beweise, dass die Quotientenabbildung $X \to X/G$ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 14.2. Betrachte $S^3 = \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \}$. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ positiv und teilerfremd. Sei $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{C}$ und sei $h : S^3 \to S^3$ die stetige Abbildung, die durch $h(z_1, z_2) = (z_1\zeta_n, z_2\zeta_n^k)$ definiert ist.

(a) Beweise, dass h eine Untergruppe G der Homöomorphismengruppe von S^3 erzeugt, die zyklisch der Ordnung n ist.

(b) Sei $L(n, k)$ der Raum der Bahnen S^3/G (mit der Quotiententopologie versehen). Beweise, dass die Quotienten Abbildung $S^3 \to L(n, k)$ eine Überlagerung ist. Berechne die Fundamentalgruppe von $L(n, k)$.

(c) Zeige, dass wenn $L(n, k)$ und $L(n', k')$ homöomorph sind, dann gilt $n = n'$.

Definition. Der Raum $L(n, k)$ heißt *der Linsenraum vom Typ* (n, k).

Aufgabe 14.3. Für jede Gruppe G aus der folgenden Liste, finde einen punktierten Raum (X, x_0), so dass G und $\pi_1(X, x_0)$ isomorph sind.

(a) $\mathbb{Z}/n_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_k$, für $k \geq 1$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ (möglicherwiese 0).

(b) $\mathbb{Z}/n_1 * \cdots * \mathbb{Z}/n_k$, für $k \geq 1$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ (möglicherwiese 0).

Aufgabe 14.4. Verwende den Satz von Seifert-van Kampen, um die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}P^2$ zu berechnen.

Aufgabe 14.5. Verwende den Satz von Seifert-van Kampen, um die Fundamentalgruppe von der Kleinschen Flasche K (siehe Aufgabe 12.2) zu berechnen.

*Abgabe: Montag 2.02.2009 vor der Vorlesung.