ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 2*, 17.10.2008

Aufgabe 2.1. Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $\bar{d}$ die Metrik auf X, die durch $\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y),1\}$ definiert ist (siehe Aufgabe 1.4). Sei Ω eine Menge, und sei X^Ω die Menge aller Abbildungen $\Omega \to X$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung $\rho : X^\Omega \times X^\Omega \to \mathbb{R}$, die durch
$$\rho(f,g) = \sup\{\bar{d}(f(\omega), g(\omega)),\ \omega \in \Omega\}$$
definiert ist, ist eine Metrik auf X^Ω.

(b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X^Ω. Sie konvergiert uniform (gleichmäßig) gegen eine Abbildung $f \in X^\Omega$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ im metrischen Raum (X^Ω, ρ) gilt.

Definition. Die Metrik ρ in 2.1 heißt die *uniforme (gleichmäßige)* Metrik auf X^Ω.

Aufgabe 2.2. Finde eine Menge X und Metriken d und d' auf X, sodass die beiden folgenden Aussagen gelten.

(a) Die Identitätsabbildungen $(X,d) \to (X,d')$ und $(X,d') \to (X,d)$ sind stetig.

(b) Es existiert keine positive Funktion $c : X \to \mathbb{R}$ mit $d(x,y) \leq c(x)d'(x,y)$ für alle $x,y \in X$.

Aufgabe 2.3. Sei $\ell^2 = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid \sum_n f(n)^2 < \infty\}$, und sei
$$\|\ \|_2 : \ell^2 \to \mathbb{R} \text{ durch } \|f\|_2 = \Big(\sum_n f(n)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
definiert.

(a) Zeige, dass $(\ell^2, \|\ \|_2)$ ein normierter Raum ist.

(b) Sei $\|\ \|_\infty$ die "Sup" Norm auf ℓ^2, also
$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(n)|,\ n \in \mathbb{N}\}\,.$$
Sei $\mathcal{T}_2$ (bzw. $\mathcal{T}_\infty$) die Topologie auf ℓ^2, die von $\|\ \|_2$ (bzw. von $\|\ \|_\infty$) gegeben ist. Beweise, dass $\mathcal{T}_2$ (strikt) feiner als $\mathcal{T}_\infty$ ist.

Aufgabe 2.4. Sei $\underline{n} = \{1,2,\ldots,n\} \subset \mathbb{N}$, und sei Σ_n die symmetrische Gruppe mit $n!$ Elementen (also die Gruppe der Permutationen von $\underline{n}$).

(a) Wieviele verschiedene Topologien gibt es auf der Menge $\underline{3}$?

(b) Wieviele Topologien $\mathcal{T}$ gibt es auf der Menge $\underline{n}$ mit der Eigenschaft, dass jedes $\sigma \in \Sigma_n$ als Abbildung $\underline{n} \to \underline{n}$ stetig (bezüglich $\mathcal{T}$) ist?

Begründe deine Antwort.

Aufgabe 2.5. Sei $(V, \|\ \|)$ ein normierter Raum mit $V \neq \{0\}$, und sei d die zugehörige Metrik. Beweise, dass eine offene Kugel in (V,d) ein eindeutig bestimmtes Zentrum und einen eindeutig bestimmten Radius besitzt.

---

*Abgabe: Montag 27.10.2008 vor der Vorlesung.