ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 3*, 24.10.2008

Aufgabe 3.1. Sei $\{\mathcal{T}_\alpha \,|\, \alpha \in I\}$ eine Menge von Topologien auf einer Menge X.

(a) Zeige, dass $\cap_{\alpha \in I} \mathcal{T}_\alpha$ eine Topologie auf X ist. Ist $\cup_{\alpha \in I} \mathcal{T}_\alpha$ auch eine Topologie auf X ?

(b) Beweise: Es gibt eine eindeutig bestimmte feinste Topologie auf X, die gröber als $\mathcal{T}_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ ist.

(c) Beweise: Es gibt eine eindeutig bestimmte gröbste Topologie auf X, die feiner als $\mathcal{T}_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ ist.

Aufgabe 3.2. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Für $i \in \underline{n} = \{1, \ldots, n\}$ und $r \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$S^+(i, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i > r\} \quad \text{und} \quad S^-(i, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i < r\}\,.$$

Beweise, dass $S = \{S^+(i, r) \,|\, i \in \underline{n},\ r \in \mathbb{Q}\} \cup \{S^-(i, r) \,|\, i \in \underline{n},\ r \in \mathbb{Q}\}$ eine Sub-Basis der Euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 3.3. Seien $(X_1, \mathcal{T}_1)$ und $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume, und seien $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ und $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ die Projektionen. Sei $X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie versehen. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildungen p_1 und p_2 sind stetig.

(b) Sei Y ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : Y \to X_1 \times X_2$ ist genau dann stetig, wenn $p_1 \circ f : Y \to X_1$ und $p_2 \circ f : Y \to X_2$ stetig sind.

(c) Die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $X_1 \times X_2$ mit der Eigenschaft, dass p_1 und p_2 stetig sind.

Aufgabe 3.4. Sei $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Topologie versehen. Sei $C(\mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und sei $P = \{p \in C(\mathbb{R}) \,|\, p(x) > 0 \ \text{ für alle } \ x \in \mathbb{R}\}$. Für $p \in P$ und $f \in C(\mathbb{R})$ sei

$$U(p, f) = \{g \in C(\mathbb{R}) \,|\ \ |f(x) - g(x)| < p(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Sei $\mathcal{P}$ die Topologie auf $C(\mathbb{R})$, die von der Sub-Basis $\{U(p, f) \,|\, p \in P,\ f \in C(\mathbb{R})\}$ erzeugt ist. Sei $0 \in C(\mathbb{R})$ die konstante Funktion mit Wert 0.

(a) Beweise, dass 0 ein Berührungspunkt von P ist.

(b) Beweise, dass es keine Folge in P gibt, die gegen 0 konvergiert.

Ist $(C(\mathbb{R}), \mathcal{P})$ metrisierbar ?

Aufgabe 3.5. Sei $C(\mathbb{R})$ wie in 3.4 (als Menge), und sei $\mathcal{T}$ die Topologie der Punktweise-Konvergenz auf $C(\mathbb{R})$.

(a) Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C(\mathbb{R})$ und sei $f \in C(\mathbb{R})$. Beweise, dass $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann punktweise nach f konvergiert, wenn $\lim_{n \to \infty} f_n = f$ in $(C(\mathbb{R}), \mathcal{T})$ gilt.

(b) Beweise, dass $(C(\mathbb{R}), \mathcal{T})$ nicht metrisierbar ist.

Hinweis zu (b): Sei $\mathcal{S}$ die Sub-Basis von $\mathcal{T}$, die in der Vorlesung gegeben worden ist, und sei $\mathcal{B}$ die zugehörige Basis. Sei $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ eine Folge mit $0 \in V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweise, dass es eine Umgebung U von 0 gibt, so dass $V_n \not\subset U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wende dann den Satz 1.34 an.

---

*Abgabe: Montag 3.11.2008 vor der Vorlesung.