ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 4*, 31.10.2008

Aufgabe 4.1. Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ durch $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \,|\, \mathbb{R} \setminus U \text{ ist abzählbar}\}$ definiert.

(a) Zeige, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.
(b) Beschreibe den Abschluss $\overline{[0,1]}$ des Intervalls $[0,1]$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.
(c) Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Beweise, dass x genau dann ein Limes von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist, wenn eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = x$ für alle $n \geq N$ existiert.
(d) Finde einen topologischen Raum Y und eine Abbildung $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to Y$, sodass f folgenstetig aber nicht stetig ist.

Definition. Die Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$, die in 4.1 definiert ist, heißt die "co-abzählbare" Topologie.

Aufgabe 4.2. Seien X und Y topologische Räume, und sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Seien $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ die Projektionen. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) Die Projektionen p_1 und p_2 sind offen.
(b) Die Projektionen p_1 und p_2 sind nicht notwendigerweise abgeschlossen.
(c) Ist Y nicht leer, so ist die Projektion $X \times Y \to X$ eine Quotientabbildung.

Aufgabe 4.3. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, und sei

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \,|\, x \in X\}$$

der Graph von f, versehen mit der Unterraumtopologie der Produkttopologie auf $X \times Y$. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist stetig.
(b) Die Einschränkung $\gamma : \Gamma(f) \to X$ der Projektion $X \times Y \to X$ ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 4.4. Finde eine Quotientabbildung (im topologischen Sinn), die weder offen noch abgeschlossen ist.

Aufgabe 4.5. Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$, die durch

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

definiert ist. Seien $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit der Euklidischen Topologie versehen, und sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der Teilraum, der durch $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ definiert ist. Ferner sei $f : \mathbb{R} \to S^1$ die stetige Abbildung, die durch $f(x) = e^{2\pi i x}$ definiert ist.

(a) Zeige, dass die Abbildung
$$\bar{f} : \mathbb{R}/\!\sim\; \to S^1$$
mit $f = \bar{f}\pi$, wobei $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\!\sim$ die kanonische Projektion ist, ein Homöomorphismus ist.
(b) Ist f abgeschlossen?

---

*Abgabe: Montag 10.11.2008 vor der Vorlesung.