ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 5*, 7.11.2008

Aufgabe 5.1. Sei $k \geq 1$ und $\mathbb{R}^k$ mit der euklidischen Norm $\| \ \|$ versehen. Für $n \geq 0$, sei

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

die n-Sphäre, mit der Teilraumtopologie versehen. Sei $s = (0, \dots, 0, -1) \in S^n$ der "Südpol".

(a) Beweise, dass es eine stetige surjektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{s\}$ gibt.
(b) Beweise, dass S^n genau dann zusammenhängend ist, wenn $n \geq 1$ gilt.

Aufgabe 5.2. Sei $p : X \to Y$ eine Quotientenabbildung von topologischen Räumen, mit Y zusammenhängend. Sei ferner angenommen, dass $p^{-1}(\{y\})$ mit der Teilraumtopologie für alle $y \in Y$ zusammenhängend ist. Zeige, dass X zusammenhängend ist.

Aufgabe 5.3. Sei $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Metrik versehen, und sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit der entschprechenden uniformen Metrik ρ versehen (siehe Aufgabe 2.1). Ist $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (mit der von ρ induzierten Topologie) zusammenhängend ?

Aufgabe 5.4. Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, und sei $Z = \prod_{i \in I} X_i$ mit der Produktopologie versehen.

(a) Wir nehmen an, dass Z nicht leer ist, und wählen $a \in Z$. Sei $F \subset \mathcal{P}(I)$ die Menge der endlichen Teilmengen von I. Für $K \in F$, sei
$$Z_K = \{f \in Z \mid f(i) = a(i) \text{ für alle } i \in I \setminus K\} \subset Z.$$
Sei A der Abschluss von $\bigcup_{K \in F} Z_K$ in Z. Beweise, dass A gleich Z ist.
(b) Sei angenommen, dass X_i für alle $i \in I$ zusammenhängend ist. Beweise, dass Z auch zusammenhängend ist.

Aufgabe 5.5. Seien $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Topologie versehen. Wir definieren topologische Räume A, B und C wie folgt :

(a) A ist die Vereinigung der Kreise mit Mittelpunkt $(0, n)$ und Radius n in $\mathbb{R}^2$ für alle $n \geq 1$, versehen mit der Teilraumtopologie ;
(b) B ist die Vereinigung der Kreise mit Mittelpunkt $(0, \frac{1}{n})$ und Radius $\frac{1}{n}$ in $\mathbb{R}^2$ für alle $n \geq 1$, versehen mit der Teilraumtopologie (die sog. Hawaiischen Ohrringe) ;
(c) C ist der Quotientenraum $\mathbb{R}/\sim$, wobei $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x, y \in \mathbb{Z}$.

Welche dieser Räume sind homöomorph?

*Abgabe : Montag 17.11.2008 vor der Vorlesung.