ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 6*, 14.11.2008

Aufgabe 6.1. Sei X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum. Beweise, dass jeder Punkt von X ein fundamentales System von kompakten Umgebungen gestattet.

Aufgabe 6.2. Sei X ein topologischer Raum, und sei $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X. Sei $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ist der Quotientenraum X/R ein Hausdorff-Raum, so ist die Relation R als Teilmenge von $X \times X$ abgeschlossen.

(b) Ist die Relation R in $X \times X$ abgeschlossen und ist die Projektion $\pi : X \to X/R$ offen, so ist der Quotientenraum X/R ein Hausdorff-Raum.

(c) X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn die Diagonale $\Delta = \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ in $X \times X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 6.3. Sei $n \geq 1$. Beweise, dass die projektiven Räume $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ und $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ kompakte Hausdorff-Räume sind.

Hinweis: Sei $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ und sei R die Relation mit $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = X/R$. Für die Kompaktheit, finde eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ sodass die Einschränkung $\pi|_K : K \to X/R$ surjektiv ist. Für die Hausdorff-Eigenschaft, verwende 6.2.b. Vorschlag: Finde eine stetige Abbildung $f : X \times X \to \mathbb{R}$ mit $R = f^{-1}(\{0\})$. Der komplexe Fall ist analog.

Aufgabe 6.4. Konstruiere Homöomorphismen $S^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ und $S^2 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$, zum Beispiel durch Anwendung des Kompaktifizierungssatzes von Alexandroff.

Aufgabe 6.5. Seien $p : A \to X$ und $q : B \to Y$ Quotientenabbildungen von topologischen Räumen, und sei

$$f = p \times q : A \times B \to X \times Y$$

das Produkt von p und q. Seien $A \times B$ und $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Gelten $B = Y$ und $q = \mathrm{id}_B$, und ist B ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum, so ist f eine Quotientenabbildung.

(b) Sind A und Y lokal-kompakte Hausdorff-Räume, so ist f eine Quotientenabbildung.

Hinweis zu (a): Sei $O \subset X \times B$ nicht leer mit $f^{-1}(O)$ offen, und sei $(a,b) \in f^{-1}(O)$. Es genügt zu zeigen, dass $S \subset A$ und $V \subset B$ mit der folgenden Eigenschaften existieren: S ist offen und p-saturiert, V ist offen, und $(a,b) \subset S \times V \subset f^{-1}(O)$. Wähle $U_1 \subset A$ offen und $V \subset B$ offen mit $\overline{V}$ kompakt, sodass $(a,b) \in U_1 \times \overline{V} \subset f^{-1}(O)$ gilt. Sei $S = \bigcup_{n \geq 1} U_n$, wobei die Folge $\{U_n\}_{n \geq 1}$ von offenen Teilmengen von A induktiv gewählt ist, sodass

$$p^{-1}(p(U_n)) \subset U_{n+1} \quad \text{und} \quad U_{n+1} \times \overline{V} \subset f^{-1}(O)$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Wurde U_n gewählt, verwende Lemma 5.17 um zu zeigen, dass solch ein U_{n+1} existiert.

*Abgabe: Montag 24.11.2008 vor der Vorlesung.