ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 7*, 21.11.2008

Aufgabe 7.1. Sei X eine Menge und seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ zwei kompakte Hausdorff-Topologien auf X. Beweise, dass falls $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ vergleichbar sind, dann sind sie gleich.

Aufgabe 7.2. Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine Familie von nicht-leeren topologischen Räumen. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Das Produkt $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ ist lokal-kompakt.
(b) Für alle $\alpha \in I$ ist X_α lokal-kompakt, und nur für endlich-viele $\beta \in I$ ist X_β nicht kompakt.

Aufgabe 7.3. Sei X ein Raum und Y ein kompakter Hausdorff-Raum, und sei $f : X \to Y$ ein Abbildung. Beweise, dass f genau dann stetig ist, wenn der Graph $\Gamma(f)$ von f in $X \times Y$ abgeschlossen ist (siehe Aufgabe 4.2).

Aufgabe 7.4. Sei $\mathbb{R}_\ell$ die Menge $\mathbb{R}$ mit der Topologie des niedrigen Limes versehen, also mit Basis $\mathcal{B}_\ell = \{[a,b) \,|\, a < b \in \mathbb{R}\}$. Sei $D = \{(x,-x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, und sei $S = \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$ mit der Produkttopologie versehen.

(a) Zeige, dass D in S abgeschlossen ist.
(b) Finde eine offene Überdeckung $\mathcal{F}$ von D in S, sodass für jede $U \in \mathcal{F}$, der Schnitt $U \cap D$ genau einen Punkt besitzt.
(c) Beweise, dass S nicht Lindelöf ist.

Definition. Der Raum S aus Aufgabe 7.4 heißt die *Sorgenfrey Ebene*.

Aufgabe 7.5. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, und sei

$$\mathcal{A}(X) = \{B \subset X \,|\, B \neq \emptyset \text{ und } B \text{ abgeschlossen}\}.$$

Für $U_1, \dots, U_n \subset X$ sei

$$O(U_1,\dots,U_n) = \{A \in \mathcal{A}(X) \,|\, A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ und } A \cap U_i \neq \emptyset \;\text{ für alle }\; 1 \leq i \leq n\}.$$

Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Menge $\mathcal{B} = \{O(U_1,\dots,U_n) \,|\, n \in \mathbb{N},\ U_1,\dots,U_n \in \mathcal{T}\}$ ist Basis einer Topologie $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{A}(X)$.
(b) Die Menge $\mathcal{S} = \{O(U) \,|\, U \in \mathcal{T}\} \cup \{O(X,U) \,|\, U \in \mathcal{T}\}$ ist eine Sub-Basis der Topologie $\mathcal{E}$.
(c) Ist X Hausdorff und kompakt, so ist $(\mathcal{A}(X), \mathcal{E})$ kompakt.

Was passiert, wenn man $\emptyset \in \mathcal{A}(X)$ zulässt ?

Definition. Die Topologie $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{A}(X)$ heißt die *Vietoris-Topologie*, oder die *exponentielle Topologie*.

*Abgabe: Montag 1.12.2008 vor der Vorlesung.