ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 8*, 28.11.2008

Aufgabe 8.1. Sei X ein normaler Raum und $p : X \to Y$ eine surjektive, stetige und abgeschlossene Abbildung.

(a) Sei $y \in Y$ und $U \subset X$ offen mit $p^{-1}(\{y\}) \subset U$. Zeige, dass eine offene Umgebung $W \subset Y$ von y mit $p^{-1}(W) \subset U$ existiert.
(b) Beweise, dass Y normal ist.

Aufgabe 8.2. Sei X ein zusammenhängender Raum mit mindestens zwei Elementen. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ist X normal, so ist X unabzählbar.
(b) Ist X regulär, so ist X unabzählbar.

Definition. Sei X ein Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *eine G_δ-Teilmenge*, wenn sie der Schnitt einer abzählbaren Familie von offenen Teilmengen in X ist.

Aufgabe 8.3. Sei X ein normaler Raum, und seien A, B zwei Teilmengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Eine stetige Funktion $f : X \to [0,1]$ mit $A = f^{-1}(\{0\})$ und $B = f^{-1}(\{1\})$ existiert.
(b) A und B sind disjunkte, abgeschlossene G_δ-Teilmengen von X.

Hinweis zu (b) $\Rightarrow$ (a): Sei $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} U_n$ mit U_n offen. Sei $h_n : X \to [0,1]$ mit $A \subset h_n^{-1}(\{0\})$ und $X \setminus U_n \subset h_n^{-1}(\{1\})$. Zeige, dass $h(x) = \sum_n 2^{-n} h_n(x)$ eine stetige Funktion $h : X \to [0,1]$ mit $h^{-1}(\{0\}) = A$ definiert.

Aufgabe 8.4. Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$. Sei

$$\mathcal{B} = \{B_\epsilon(x,y) \cap M \mid (x,y) \in M,\ \epsilon > 0\} \cup \big\{B_\epsilon(x,\epsilon) \cup \{(x,0)\} \,\big|\, x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\big\},$$

wobei $B_\epsilon(x,y)$ die offene Kugel um $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit Radius ϵ bezüglich der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) $\mathcal{B}$ ist Basis einer Hausdorff Topologie $\mathcal{T}$ auf M.
(b) Der Raum $(M, \mathcal{T})$ ist vollständig-regulär, erst-abzählbar und separabel.
(c) Der Teilraum $X = \{(x,y) \in M \mid y = 0\}$ ist diskret, abgeschlossen und nicht separabel.
(d) Der Raum $(M, \mathcal{T})$ ist nicht Lindelöf.
(e) Der Raum $(M, \mathcal{T})$ ist nicht normal.

Vorschlag zu (e): Zeige, dass die Menge $C(X)$ der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ strikt größere Kardinalität als $C(M)$ hat.

Definition. Der Raum $(M, \mathcal{T})$ in 8.4 heißt die *Moore-Ebene* oder die *Niemytzki-Ebene*.

Aufgabe 8.5. Sei S die Sorgenfrey-Ebene (siehe Aufgabe 7.4). Beweise die folgenden Aussagen.

(a) S ist nicht normal.
(b) Ein Produkt von normalen Räumen ist nicht notwendigerweise normal.

---

*Abgabe: Montag 8.12.2008 vor der Vorlesung.