ÜBUNGEN ZUR TOPOLOGIE I

Blatt 9*, 5.12.2008

Aufgabe 9.1. Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, und seien A und B zwei abgeschlossene Teilräume von X mit $X = A \cup B$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Der Raum X ist genau dann metrisierbar, wenn er zweit-abzählbar ist.
(b) Sind A und B metrisierbar, so ist X metrisierbar.

Aufgabe 9.2. Sei X ein vollständig-regulärer Raum, und sei $\beta(X)$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung von X. Beweise, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn $\beta(X)$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 9.3. Seien X_0, X_1 und X_2 Räume und seien $f_1 : X_0 \to X_1$ und $f_2 : X_0 \to X_2$ stetige Abbildungen. Sei $X_1 \sqcup X_2$ die disjunkte Vereinigung (als Raum) von X_1 und X_2, und sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $X_1 \sqcup X_2$, die von $\{\big(f_1(x), f_2(x)\big) \mid x \in X_0\}$ erzeugt ist. Sei

$$Z = (X_1 \sqcup X_2)/\sim$$

mit der Quotiententopologie versehen. Für $i = 1, 2$, sei $g_i : X_i \to Z$ die Verknüpfung der kanonischen Inklusion $X_i \to X_1 \sqcup X_2$ mit der kanonischen Projektion $X_1 \sqcup X_2 \to Z$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) g_1 und g_2 sind stetig. Ist f_1 injektiv, so ist g_2 injektiv.
(b) Sei Y ein Raum, und für $i = 1, 2$ seien $h_i : X_i \to Y$ stetige Abbildungen mit $h_1 f_1 = h_2 f_2$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $h : Z \to Y$ mit $h_i = h g_i$ für $i = 1, 2$.

Definition. Das Tripel (Z, g_1, g_2) in Aufgabe 9.3 heißt der *Push-Out* von f_1 und f_2. Der Raum Z wird oft $X_1 \sqcup_{X_0} X_2$ notiert.

Aufgabe 9.4. Sei X ein Raum. Ein Teilraum A von X heißt ein *Retrakt von* X, wenn es eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$ gibt.

(a) Beweise: ist X ein Haudorff-Raum und ist $A \subset X$ ein Retrakt von X, so ist A abgeschlossen.
(b) Sei X ein T_1-Raum, und seien x, y Punkte in X mit $x \neq y$. Entscheide, unter welche Voraussetzungen der Teilraum $A = \{x, y\}$ ein Retrakt von X ist.
(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweise, dass die Sphäre S^n (Aufgabe 5.1) ein Retrakt von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist.
(d) Ist S^n ein Retrakt von $\mathbb{R}^{n+1}$? Gib eine Vermutung an.

Aufgabe 9.5. Sei X ein metrischer Raum, und seien $a, b \in X$. Sei $X^{[0,1]}$ mit der uniformen Metrik (Aufgabe 2.1) versehen. Sei

$$\Omega(X; a, b) = \{\ w \in X^{[0,1]} \mid w \text{ stetig},\ w(0) = a \ \text{ und } \ w(1) = b\ \}$$

mit der Teilraummetrik versehen. Seien $\alpha, \beta \in \Omega(X; a, b)$. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Die Wege α und β sind homotop relativ zu den Endpunkten.
(b) Es existiert ein Weg von α nach β in $\Omega(X; a, b)$.

---

*Abgabe: Montag 15.12.2008 vor der Vorlesung.