Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2011

# ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE

Blatt 10*, 03.06.2011

**Aufgabe 10.1.** Berechne die folgenden Homologiegruppen :
(a) $H_*(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m;\mathbb{Z})$ für $1 \leq n, m \leq \infty$.
(b) $H_*\big((S^1)^n;\mathbb{Z}\big)$ für $1 \leq n < \infty$.

**Aufgabe 10.2.** Sei $X$ ein Moore Raum von Typ $(\mathbb{Z}/m, n)$ mit 3 Zellen, für $m, n \geq 2$. Sei $q : X \to X/X^{(n)} \cong S^{n+1}$ die Quotientabbildung, und $i$ die Identität von $X$.
(a) Berechne $H_*(X \times X;\mathbb{Z})$ und $H_*(S^{n+1} \times X;\mathbb{Z})$.
(b) Benutze die Abbildung $q \times i$ um zu beweisen, dass die Künneth exakte Folge nur unnatürlich spaltet.

**Aufgabe 10.3.** Sei $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Identifiziere $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit $\{f \in \mathbb{C}[x] \mid f \neq 0,\ \ \deg(f) \leq n\}$.
(a) Beweise, dass die Multiplikation von Polynomen ein (stetiges) Produkt

$$\mu_{i,j} : \mathbb{F}P^i \times \mathbb{F}P^j \to \mathbb{F}P^{i+j}$$

induziert.
(b) Untersuche die Eigenschaften dieses Produkts (Assoziativität (für drei Faktoren), Kommutativität).
(c) Beweise, dass $\mathbb{F}P^\infty$ ein kommutativer $H$-Raum ist. Ist $\mathbb{F}P^\infty$ *strikt* kommutativ und assoziativ ?

**Aufgabe 10.4.** Für alle $k \geq 1$, bezeichne mit $u_k \in H_{2k}(\mathbb{C}P^k;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ einen gewählten Erzeuger. Seien $i, j \geq 1$ gegeben.
(a) Sei $[f] \in \mathbb{C}P^{i+j}$ ein Polynom mit $i + j$ verschiedene Wurzeln. Beweise, dass $\mu_{i,j}^{-1}([f])$ aus $\ell = \binom{i+j}{i}$ Punkten $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ besteht.
(b) Beweise, dass die folgende Formel gilt:

$$\mu_{i,j*}(u_i \times u_j) = \pm \binom{i+j}{i} u_{i+j}\,.$$

(c) Bestimme die Pontrjagin-Algebrastruktur von $H_*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$

*Hinweis zu (b):* Wir haben Isomorphismen

$$H_{2k}(\mathbb{C}P^k;\mathbb{Z}) \cong H_{2k}(\mathbb{C}P^k, \mathbb{C}P^k \setminus \{z\};\mathbb{Z}) \cong H_{2k}(V_z, V_z \setminus \{z\};\mathbb{Z})$$

für alle $z \in \mathbb{C}P^k$, wobei $V_z$ eine Umgebung von $z$ ist, die zu $\mathbb{C}^k$ homöomorph ist. Beide Homomorphismen sind von einer Inklusion induziert, der zweite ist ein Isomorphismus dank Ausschneidung. Evaluiere

$$\mu_{i,j*} : H_{2(i+j)}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j, (\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j) \setminus \mu_{i,j}^{-1}([f]);\mathbb{Z}) \to H_{2(i+j)}(\mathbb{C}P^{i+j}, \mathbb{C}P^{i+j} \setminus \{[f]\};\mathbb{Z})\,.$$

*Abgabe : Freitag, 17.06.2011.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie2-SS11.html`