Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE

Blatt 11*, 17.06.2011

Aufgabe 11.1. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum und sei ΩX der Schleifenraum von X, also

$$\Omega X = \mathbf{Top}_*\big((S^1, 1), (X, x_0)\big)$$

versehen mit der kompakt-offenen Topologie. Beweise, dass ΩX eine H-Gruppe ist.

Aufgabe 11.2. Seien $1 \leq k \leq n$, $(\mathbb{F}, G(n), R) = (\mathbb{R}, O(n), \mathbb{Z}/2)$ oder $(\mathbb{C}, U(n), \mathbb{Z})$ und sei $V^{\mathbb{F}}_{n,k}$ die Stiefelmannigfaltigkeit (bestehend aus k-Rahmen in $\mathbb{F}^n$).

(a) Beweise, dass die Wirkung $G(n) \times V^{\mathbb{F}}_{n,k} \to V^{\mathbb{F}}_{n,k}$ die Struktur eines linken $H_*(G(n); R)$-Modul auf $H_*(V^{\mathbb{F}}_{n,k}; R)$ induziert.
(b) Beschreibe diese Modulstruktur auf $H_*(V^{\mathbb{F}}_{n,k}; R)$ (durch Erzeuger und Relationen).

Aufgabe 11.3. Sei A eine abelsche Gruppe. Betrachte die Familie von Funktoren

$$\big\{h^A_n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(-;\mathbb{Z}), A) : \mathbf{Top}^2 \to \mathbf{Ab}\big\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

(a) Definiert $h^{\mathbb{Z}}_*$ eine Kohomologietheorie?
(b) Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung an A, sodass h^A_* eine Kohomologietheorie ist.

Aufgabe 11.4. Sei X ein Raum und sei A eine abelsche Gruppe. Wir betrachten eine Kokette $\phi \in S^1(X; A)$ als eine Funktion auf der Menge der Wege in X mit Werten in A. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Sei $\phi \in S^1(X; A)$ ein Kozykel. Sind α und β Wege mit $\alpha(1) = \beta(0)$, so gilt $\phi(\alpha \cdot \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$. Es gelten $\phi(\alpha) = 0$ falls α konstant ist, und $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ falls $\alpha \sim \beta$. Ausserdem ist ϕ genau dann einen Korand, wenn $\phi(\alpha)$ nur vom Paar $(\alpha(0), \alpha(1))$ abhängt, für alle α.
(b) Sei $x_0 \in X$ als Basispunkt gewählt. Die Regel $[\phi] \mapsto \big([\alpha] \mapsto \phi(\alpha)\big)$ definiert einen natürlichen Homomorphismus

$$h : H^1(X, A) \to \mathbf{Gr}(\pi_1(X, x_0), A),$$

wobei **Gr** die Kategorie der Gruppen bezeichnet.
(c) Ist (X, x_0) wegzusammenhängend, so ist h ein Isomorphismus.
(d) Die Gruppe $H^1(X; \mathbb{Z})$ ist torsionsfrei.

---

*Abgabe: Freitag, 24.06.2011.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie2-SS11.html`