Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE

Blatt 12*, 24.06.2011

Aufgabe 12.1. Seien (X, A) ein Paar von Räumen und M eine abelsche Gruppe. Beweise, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^n(A; M) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\beta"] & H^{n+1}(X, A; M) \arrow[d, "\beta"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(A; \mathbb{Z}), M) \arrow[r, "\partial_n^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_{n+1}(X, A; \mathbb{Z}), M) \end{tikzcd}$$

für alle $n \geq 0$ kommutativ ist.

Aufgabe 12.2. Seien $\ell, m, n \in \mathbb{N}$. Bestimme die folgenden Ext-Gruppen.

(a) $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m; \mathbb{Z})$;
(b) $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m; \mathbb{Z}/n)$;
(c) $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}/\ell}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n)$ wenn definiert;
(d) $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$; hier betrachte die kurze exakte Folge von $\mathbb{Z}$-Moduln

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

und die Zerlegung von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ als Summe über die Primzahlen p der Prüfer-Gruppen $\mathbb{Z}/p^\infty$.

Aufgabe 12.3. Bestimme (direkt nach der Definition des Cup-Produkts) die folgenden Kohomologie-Algebren.

(a) $H^*(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$.
(b) $H^*(M(\mathbb{Z}/m, 1); \mathbb{Z}/m)$, wobei $m \geq 2$ und $M(\mathbb{Z}/m, 1)$ ein Moore-Raum vom Typ $(\mathbb{Z}/m, 1)$ ist.

Aufgabe 12.4. Beweise, dass $M = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul nicht frei ist.
Hinweis: Wähle eine Primzahl p, und betrachte

$$S = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in M \mid p^k \text{ teilt } x_i \text{ für fast alle } i, \forall k \in \mathbb{N}\} \subset M\,.$$

Zeige, dass S/pS ein Untervektorraum von $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{F}_p$ ist. Zeige anderseits, dass falls M frei ist, so gilt $S \cong \bigoplus_B \mathbb{Z}$ mit B nicht abzählbar.

---

*Abgabe: Freitag, 1.07.2011.
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie2-SS11.html