Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE

Blatt 13*,01.07.2011

Aufgabe 13.1. Sei R ein kommutativer Ring. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Falls X die Vereinigung von n offenen zusammenziehbaren Teilräumen ist, so sind alle n-fache Cup-Produkte $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$ in $\widetilde{H}^*(X;R)$ null.

(b) Für jede Abbildung $f : S^{m+n} \to S^m \times S^n$ gilt $H_{m+n}(f;\mathbb{Z}) = 0$.

Hinweis zu (a): Induktion auf n mit Hilfe des reltiven Cup-Produktes.

Aufgabe 13.2. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Seien X und Y punktierte Räumen. Wir haben einen Isomorphismus von (nicht unitären) R-Algebren

$$\widetilde{H}^*(X;R) \oplus \widetilde{H}^*(Y;R) \cong \widetilde{H}^*(X \vee Y;R),$$

wo wir links das komponentenweise Produkt nehmen.

(b) Für $m, n \geq 1$ sind die Räumen $S^m \times S^n$ und $S^m \vee S^n \vee S^{m+n}$ nicht Homotopie-äquivalent.

Aufgabe 13.3. Sei M_g eine orientierbare Fläche von Geschlecht g. Bestimme die Kohomologie-Algebra $H^*(M_g;\mathbb{Z})$.

Aufgabe 13.4. Eine Divisionsalgebrastruktur auf $\mathbb{R}^n$ ist eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung

$$\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

mit $\mu(a,-)$ und $\mu(-,a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ surjektiv für alle $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(a) Mit Hilfe von Poincaré-Dualität, bestimme die Algebra $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{F}_2)$ für alle $n \geq 1$.

(b) Beweise den folgenden Satz von H. Hopf: Falls $\mathbb{R}^n$ die Struktur einer Divisionsalgebra besitzt, so ist n eine Potenz von 2.

Hinweis zu (b): Die Abbildung $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, $(x,y) \mapsto \mu(x,y)/|\mu(x,y)|$ induziert eine Abbildung $f : \mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$. Bestimme $H^*(f,\mathbb{F}_2)$ und benutze dann: aus $\binom{n}{k} \equiv 0$ mod (2) für alle $1 \leq k \leq n-1$ folgt, dass n eine Potenz von 2 ist.

---

*Abgabe: Freitag, 8.07.2011.

`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie2-SS11.html`