Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE

Blatt 3*, 15.04.2011

Aufgabe 3.1. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Seien W und V Räume, V kompakt. Ferner sei $w \in W$ und sei O eine offene Umgebung von $\{w\} \times V$ im Produkt $W \times V$. Dann existiert $U \subset W$ offen mit $w \in U$ und $U \times V \subset O$.

Seien nun $p : A \to X$ und $q : B \to Y$ Quotientenabbildungen von topologischen Räumen, und sei

$$f = p \times q : A \times B \to X \times Y$$

das Produkt von p und q.

(b) Gelten $B = Y$ und $q = \mathrm{id}_B$, und ist B ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum, so ist f eine Quotientenabbildung.

(c) Sind A und Y lokal-kompakte Hausdorff-Räume, so ist f eine Quotientenabbildung.

Hinweis zu (b): Sei $O \subset X \times B$ nicht leer mit $f^{-1}(O)$ offen, und sei $(a, b) \in f^{-1}(O)$. Es genügt zu zeigen, dass $S \subset A$ und $V \subset B$ mit der folgenden Eigenschaften existieren: S ist offen und p-saturiert (also $S = p^{-1}(p(S))$), V ist offen, und $(a, b) \in S \times V \subset f^{-1}(O)$. Wähle hierzu $U_1 \subset A$ offen und $V \subset B$ offen mit $\overline{V}$ kompakt, sodass $(a, b) \in U_1 \times \overline{V} \subset f^{-1}(O)$ gilt. Sei $S = \bigcup_{n \geq 1} U_n$, wobei die Folge $\{U_n\}_{n \geq 1}$ von offenen Teilmengen von A induktiv so gewählt ist, dass

$$p^{-1}(p(U_n)) \subset U_{n+1} \quad \text{und} \quad U_{n+1} \times \overline{V} \subset f^{-1}(O)$$

für alle $n \geq 1$ gilt. Wurde U_n gewählt, verwende (a) um zu zeigen, dass solch ein U_{n+1} existiert.

Aufgabe 3.2. Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex. Beweise, dass eine Abbildung $H : [0, 1] \times X \to Y$ genau dann stetig ist, wenn die Einschränkung $H|_{[0,1] \times \bar{e}}$ für alle $e \in K$ stetig ist.

Aufgabe 3.3. Beweise, dass S^∞ zusammenziehbar ist.

Aufgabe 3.4. Berechne die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}P^\infty$, und beschreibe seine universelle Überlagerung.

---

*Abgabe: Dienstag, 26.04.2011.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie2-SS11.html`