Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE

Blatt 6*, 06.05.2011

Aufgabe 6.1. Sei W die Menge der Homöomorphismenklassen von endlichen CW-Komplexen, und sei $\widetilde{\chi} : W \to \mathbb{Z}$ die reduzierte Euler-Poincaré Charakteristik, die durch $\widetilde{\chi}(X) = \chi(X) - 1$ definiert ist.

(a) Beweise, dass für alle CW-Paare (X, A), X endlich, die Gleichung
$$\widetilde{\chi}(X) = \widetilde{\chi}(A) + \widetilde{\chi}(X/A)$$
gilt.

(b) Sei M eine Abelsche Gruppe, und sei $\phi : W \to M$ eine Abbildung mit
$$\phi(X) = \phi(A) + \phi(X/A)$$
für alle endliche CW-Paare (X, A). Beweise, dass $\phi(X) = \phi(S^0)\widetilde{\chi}(X)$ für alle $X \in W$ gilt:
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\widetilde{\chi}"'] & M \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "\cdot\phi(S^0)"'] & \end{tikzcd}$$

Aufgabe 6.2. Sei $g \in \mathbb{N}$ und sei M_g eine orientierbare abgeschlossene Fläche vom Geschlecht g, definiert als $\sharp_g \mathbb{T}^2$ oder als Quotient einer polygonale Fläche in $\mathbb{R}^2$ (siehe 4.45, Topologie 1). Bestimme eine CW-Zerlegung von M_g und berechne $H_*^{CW}(M_g; \mathbb{Z})$ und $\chi(M_g)$.

Aufgabe 6.3. Sei $g \in \mathbb{N}$ und sei P_g eine nicht-orientierbare abgeschlossene Fläche vom Geschlecht g, definiert als $\sharp_g \mathbb{R}P^2$ oder als Quotient einer polygonale Fläche in $\mathbb{R}^2$ (siehe 4.45, Topologie 1). Bestimme eine CW-Zerlegung von P_g und berechne $H_*^{CW}(P_g; \mathbb{Z})$ und $\chi(M_g)$.

Aufgabe 6.4. Beweise, dass $SU(2)$ und S^3 homöomorph sind. Beschreibe die CW-Zerlegung von S^3, bzw. $\mathbb{R}P^3$, die die CW-Zerlegung von $V_{2,1}^{\mathbb{C}}$, bzw. $V_{3,2}^{\mathbb{R}}$ in normalen Zellen entschpricht.

*Abgabe: Freitag, 13.05.2011.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie2-SS11.html`