Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE

Blatt 9*, 27.05.2011

Aufgabe 9.1. Sei R ein kommutativer Ring. Seien M, N und P drei R-Moduln, und sei $f : M \oplus N \to P$ eine R-bilineare Abbildung. Ferner sei $i : M \oplus N \to M \otimes_R N$ die kanonische R-bilineare Abbildung, und $g : M \otimes_R N \to P$ die R-lineare Abbildung mit $f = gi$. Setze $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$.

(a) Welche Beziehung haben Bild(f) und Bild(g)?

(b) Konstruiere einen Homomorphismus $\phi : M^* \otimes_R N \to \mathrm{Hom}_R(M, N)$, so dass ϕ ein Isomorphismus ist, falls M frei und endlich erzeugt ist.

(c) Sei $M = N = R^2$, mit der kanonischen Basis versehen. Bestimme $\phi^{-1}(\mathrm{Id}_M)$.

Aufgabe 9.2. Sei X ein endlicher CW-Komplex. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Sei K ein Körper. Dann gilt

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim_K H_n(X; K),$$

wobei $\chi(X)$ die Euler-Poincaré Charakteristic von X ist.

(b) Gilt $\widetilde{H}_*(X; \mathbb{Q}) = 0$ und $\widetilde{H}_*(X; \mathbb{F}_p) = 0$ für alle Primzahlen p, so folgt $\widetilde{H}_*(X; M) = 0$ für jede abelsche Gruppe M.

Aufgabe 9.3. Finde eine Abbildung $f : X \to Y$ und eine abelsche Gruppe M, die verdeutlichen, dass die exakte Folge der universellen Koeffizienten (für $H_n(-; M)$, $n \geq 2$) nur *unnatürlich* spaltet.
Hinweis: Für X kann man zum Beispiel einen Moore-Raum von Typ $(\mathbb{Z}/p, n)$ mit drei Zellen nehmen.

Aufgabe 9.4. Sei p eine Primzahl und $\beta : H_*(-; \mathbb{F}_p) \to H_{*-1}(-; \mathbb{F}_p)$ der Bockstein Homomorphismus.

(a) Beweise, dass $\beta \circ \beta = 0$.

(b) Untersuche inwiefern β mit dem Randoperator $\partial_m : H_m(X, A; \mathbb{F}_p) \to H_{m-1}(A; \mathbb{F}_p)$ eines Paares (X, A) verträglich ist.

(c) Bestimme β für $H_*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{F}_2)$, $1 \leq n \leq \infty$, und berechne $H_*(H_*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{F}_2), \beta)$.

---

*Abgabe: Freitag, 03.06.2011.
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie2-SS11.html