Gegeben $X \in G$, G Kategorie

$\Delta : C \to C \times C$ Diagonale

und natürliche Trafo's $\eta : \underbrace{[X,-] \times [X,-]}_{= [X,-]^2} \circ \Delta \longrightarrow [X,-]$

wo $[X,-] = \mathrm{Hom}_G(X,-)$ und beide Funktoren $G \longrightarrow \mathrm{Set}$

und $\varepsilon : C_* \longrightarrow [X,-]$

wo C_* der konstante Funktor $G \to \mathrm{Set}$ mit Wert $\{*\}$ ist.

derart, dass $\underset{[X,Y]}{\varepsilon_Y(*)}$ ein neutrales Element bzgl. $\eta_Y : [X,Y] \times [X,Y] \to [X,Y]$ ist für alle $Y \in G$.

Besitzt die Kategorie nun endliche Koprodukte, so gilt:

$\exists!\ d : X \longrightarrow X + X$ mit

$$\begin{tikzcd} {[X+X,-]} \arrow[rr, "{[d,-]}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{can.}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & {[X,-]} \\ {[X,-]^2} \arrow[urr, "\eta"'] & & \end{tikzcd}$$

und $!\ e : X \longrightarrow 0$ mit

0: initiales Objekt in G

$$\begin{tikzcd} {[0,-]} \arrow[rr, "{[e,-]}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{can.}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & {[X,-]} \\ C_* \arrow[urr, "\varepsilon"'] & & \end{tikzcd}$$

(Das ist das Lemma von Yoneda!)

Scheint OK!

<u>Bew</u>. Sei d das Bild von id_{X+X} unter (also $d = \eta_{X+X}(i_1,i_2)$ wo $i_1,i_2 : X \to X+X$ die Inklusionen sind)

$$[X+X, X+X] \overset{\mathrm{can.}}{\longleftrightarrow} [X, X+X] \times [X, X+X] \xrightarrow{\eta_{X+X}} [X, X+X]$$

Dann gilt für $f, g \in [X,Y]$:

Linksraum $= [\eta_{X+X}(i_1,i_2), Y](f+g) = (f+g) \circ (\eta_{X+X}(i_1,i_2)) = [X, f+g]\left(\eta_{X+X}(i_1,i_2)\right) = \left([X,f+g] \circ \eta_{X+X}\right)(i_1,i_2)$

$$\begin{tikzcd} {[X,X+X]^2} \arrow[r, "\eta_{X+X}"] \arrow[d, "{[X,f+g]^2}"'] & {[X,X+X]} \arrow[d, "{[X,f+g]}"] \\ {[X,Y]^2} \arrow[r, "\eta_Y"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & {[X,Y]} \end{tikzcd}$$

$= \left(\eta_Y \circ [X,f+g]^2\right)(i_1,i_2) = \eta_Y\left([X,f+g]^2(i_1,i_2)\right)$

$= \eta_Y\left((f+g) \circ i_1, (f+g) \circ i_2\right) = \eta_Y(f,g) =$ rechts raum.

Was die erste Behauptung zeigt! (verschiedene d's geben natürlich verschiedene η's)

Zum Nachweis, dass nun kommutiert (also e, d X zu einem Comonoid machen)

$$\begin{tikzcd} X+0 & X+X \arrow[l, "{(id,e)}"'] \\ & X \arrow[u, "d"'] \arrow[ul, leftrightarrow, "\cong"] \end{tikzcd}$$

(analog für

$$\begin{tikzcd} 0+X & X+X \arrow[l] \\ & X \arrow[u] \arrow[ul, leftrightarrow] \end{tikzcd}$$
)

reicht es nachzuweisen, dass

$$\begin{tikzcd} {[X+0,-]} \arrow[r, "{[(id,e),-]}"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\cong"'] & {[X+X,-]} \arrow[d, "{[d,-]}"] \\ & {[X,-]} \end{tikzcd}$$

kommutiert. (verschiedene Abbildungen induzieren verschiedene Trafo's!!)

aber es gilt

$$\begin{tikzcd} & ([X,-] \times C_*) \circ \Delta \arrow[dr, "(id \times \varepsilon) \circ id_\Delta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ {[X+0,-]} \arrow[ur, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[r, "{[(id,e),-]}"] & {[X+X,-]} \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "{[d,-]}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & ([X,-] \times [X,-]) \circ \Delta \arrow[dl, "\eta"] \\ & {[X,-]} & \end{tikzcd}$$

nach obigem Dings

und die Komposition außen lang ist der kanonische Isomorphismus nach Voraussetzung an ε und η.