

Gegeben $X \in G$, G Kategorie $\Delta: C \rightarrow C \times C$
Dingwelt

und natürliche Trafo's $\gamma: ([X, -] \times [X, -]) \rightarrow [X, -]$

wo $[X, -] = \text{Hom}(X, -)$ und beide Funktoren $G \rightarrow \text{Set}$

$= [X, -]^2$ und $\varepsilon: C_* \rightarrow [X, -]$

wo C_* der konstante Funktor mit Wert $\{*\}$ ist. $G \rightarrow \text{Set}$

daher, dass $\varepsilon_\gamma(*)$ ein neutrales Element bzgl. $[X, Y]$

$\eta: [X, Y] \times [X, Y] \rightarrow [X, Y]$ ist für alle $Y \in G$.

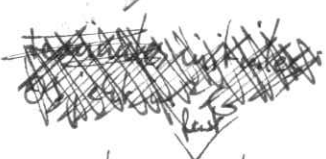
Besitzt die Kategorie nun endliche ~~Koprodukte~~ Koprodukte , so gilt:

$\exists! d: \text{~~XXXXX~~ } X \rightarrow X + X$ mit $[X+X, -] \xrightarrow{[d, -]} [X, -]$

und $e: \text{~~XXXXX~~ } X \rightarrow 0$ mit $[0, -] \xrightarrow{[e, -]} [X, -]$

$[X, -]^2 \xrightarrow{\eta} [X, -]$

$C_* \xrightarrow{\varepsilon} [X, -]$



initiales Objekt in G

(Das ist das Lemma von Yoneda!)

Scheint ok!

Bew. Sei d das Bild von id_{X+X} unter $[X+X, X+X] \xrightarrow{\text{can.}} [X, X+X] \times [X, X+X] \xrightarrow{\eta_{X+X}} [X, X+X]$

(also $d = \eta(i_1, i_2)$ wo $i_1, i_2: X \rightarrow X+X$ die Inklusionen sind)

Dann gilt für $f, g \in [X, Y]$:

linksrum $= \eta_{X+X}(i_1, i_2)(f+g) = (f+g) \circ \eta_{X+X}(i_1, i_2) = [X, f+g](\eta_{X+X}(i_1, i_2)) = ([X, f+g] \circ \eta_{X+X})(i_1, i_2)$

$[X, X+X]^2 \xrightarrow{\eta_{X+X}} [X, X+X] \xrightarrow{(\eta \circ [X, f+g]^2)} [X, X+X] = \eta_Y([X, f+g]^2)(i_1, i_2) = \eta_Y([X, f+g]^2(i_1, i_2))$

$[X, Y]^2 \xrightarrow{\eta_Y} [X, Y] = \eta_Y((f+g) \circ i_1, (f+g) \circ i_2) = \eta_Y(f, g) = \text{rechts rum.}$

Was die Behauptung zeigt! (verschiedene d 's geben unterschiedliche η 's)

Zum Nachweis, dass man
kommutiert

(also \circ, Δ zu einem
Comonoid machen)

$$\begin{array}{ccc}
 X+0 & \xleftarrow{(\text{id}, e)} & X+X \\
 \cong \searrow & & \uparrow d \\
 & & X
 \end{array}$$

(analog für)

$$\begin{array}{ccc}
 0+X & \xleftarrow{} & X+X \\
 & & \uparrow \\
 & & X
 \end{array}$$

reicht es nachzuweisen, dass

$$\begin{array}{ccc}
 [X+0, -] & \xrightarrow{(\text{id}, e)} & [X+X, -] \\
 \cong \searrow & & \downarrow [\Delta, -] \\
 & & [X, -]
 \end{array}$$

kommutiert
(verschiedene Abbildungen
induzieren verschiedene
Trafo's !!)

aber es gilt

$$\begin{array}{ccc}
 [X, -] \times (x) \circ \Delta & \xrightarrow{(\text{id} \times e) \circ \text{id}_\Delta} & [X, -] \times [X, -] \circ \Delta \\
 \cong \nearrow & & \downarrow [\Delta, -] \circ \Delta \\
 [X+0, -] & \xrightarrow{(\text{id}, e)} & [X+X, -] \xrightarrow{\cong} [X, -] \times [X, -] \circ \Delta \\
 & & \downarrow [\Delta, -] \circ \Delta \\
 & & [X, -]
 \end{array}$$

nach obigen
Dings

und die Komposition außen lang ist der
kanonische Isomorphismus nach
Voraussetzung an ε und η .