

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 10*, 21.12.2011

Ziel dieses Zettels ist die Konstruktion einer wichtigen Homologietheorie: der *stabilen Homotopie*. Üblicherweise konstruiert man nur die reduzierte Version, analog zu den Betrachtungen in Kapitel 3 für Kohomologietheorien. Wir wollen hier den Versuch unternehmen auch die relativen Gruppen sauber zu beschreiben. In den ersten Aufgaben werden also Funktoren \mathbb{S}_n und natürliche Transformationen ∂_n konstruiert, die folgenden Satz mit Inhalt füllen. Der zweite Teil besteht aus dessen Beweis.

Proposition. *Die Funktoren $\mathbb{S}_n : \mathcal{TOP}^2 \rightarrow \mathcal{AB}$ zusammen mit den natürlichen Transformationen $\partial_n : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_{n-1} \circ r$ bilden eine verallgemeinerte Homologietheorie. Desweiteren gibt es (bis auf das Vorzeichen) kanonische Isomorphismen $\mathbb{S}_n(*) \rightarrow \pi_n^S$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und für punktierte Räume gibt es einen (bis auf das Vorzeichen) kanonischen natürlichen Isomorphismus: $\mathbb{S}_n(X, x) \cong \text{Colim}_k \pi_{n+k}(S^k(X, x))$.*

Wir wollen definieren: $\mathbb{S}_n(X, A) = \text{Colim}_k [(D^{n+k}, S^{n-1+k}), (S^k X, S^k A)]$, wo der Colimes entlang des Einhängungshomomorphismus definiert ist. Hierfür gilt es einiges zu prüfen:

Aufgabe 10.1.

- (a) Sei (Y, B) ein Raumpaar mit B einfach zusammenhängend. Dann ist für jedes $b \in B$ die offensichtliche Abbildung

$$[(D^n, S^{n-1}), (Y, B)] \longleftarrow [(D^n, S^{n-1}, e_1), (Y, B, b)] = \pi_n(Y, B, b)$$

eine Bijektion.

- (b) Insbesondere gibt dies eine natürliche Gruppenstruktur auf $[(D^n, S^{n-1}), (Y, B)]$ für alle $n \geq 2$.

Aufgabe 10.2.

Wir fixieren den folgenden Homöomorphismus

$$\varphi_n : (SD^n, SS^{n-1}) \rightarrow (D^{n+1}, S^{n-1}).$$

Hier ist $SX = (X \times [-1, 1]) / (X \times S^0)$, und

$$\varphi_n(x, t) = (\cos(\pi t/2)x_1, \dots, \cos(\pi t/2)x_n, \sin(\pi t/2)).$$

Zeigen sie, dass die Abbildung

$$S : [(D^n, S^{n-1}), (Y, B)] \longrightarrow [(D^{n+1}, S^n), (SY, SB)], [f] \longmapsto [(Sf) \circ \varphi_n^{-1}]$$

ein Gruppenhomomorphismus ist und unter Annahmen über den Zusammenhang der involvierten Räume ein Isomorphismus.

Einige der hierfür benötigten Formeln finden Sie im Buch *Algebraische Topologie* von Lück (um Seite 50).

*Abgabe: Montag 16.01.2012.

<http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html>

Damit ist obige Definition für \mathbb{S}_n (auf Objekten) gerechtfertigt, für Abbildungen ist sie hoffentlich offensichtlich. Nun zu ∂_n : Wir versuchen ∂_n als Abbildung zwischen den Colimites zu definieren, die induziert wird von den Abbildungen

$$\begin{aligned} [(D^{n+k}, S^{n-1+k}), (S^k X, S^k A)] &\longrightarrow [(D^{n-1+k}, S^{n-2+k}), (S^k A, S^k \emptyset)] \\ [f] &\longmapsto [f \circ \psi_{n-1+k}] \end{aligned}$$

wo ψ_n eine der Quotientenabbildungen $D^n \rightarrow S^n$ ist, die den Rand zu einem Punkt identifizieren.

Damit dies eine sinnvolle Definition wird, muss $\psi(S^{n-2+k}) \in f^{-1}(S^k \emptyset)$ liegen. Diese Menge kann jedoch leer sein. Zur Rettung fixieren wir zunächst den Homöomorphismus $\psi_n : D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$ durch

$$\psi_n(x) = \left(\frac{x_1 \sin(\pi|x|)}{|x|}, \dots, \frac{x_{n-1} \sin(\pi|x|)}{|x|}, -\cos(\pi|x|) \right)$$

und definieren nun:

$$\partial_n^k : [(D^{n+k}, S^{n-1+k}), (S^k X, S^k A)] \longrightarrow [(D^{n+k}, S^{n-1+k}), (S^{k+1} A, S^{k+1} \emptyset)]$$

durch

$$[f] \longmapsto [(Sf) \circ \phi_{n-1+k}^{-1} \circ \psi_{n+k}].$$

Aufgabe 10.3.

- Zeigen Sie: ∂_n^k ist ein Gruppenhomomorphismus und es gilt $\partial_n^{k+1}(S[f]) = - (S(\partial_n^k([f])))$.
- Folgern Sie: Man erhält sogar zwei wohldefinierte Transformationen $\partial_n : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{S}_{n-1} \circ r$.
- Suchen Sie sich eine der beiden aus.

Damit sind die Zutaten des obigen Satzes erklärt, nun gilt es ihn zu beweisen:

Aufgabe 10.4. Beweisen Sie, dass die oben konstruierten Dinge das Homotopieinvarianz- und das LEF-Axiom erfüllen.

Aufgabe 10.5. Zeigen Sie, dass auch das Ausschneidungsaxiom erfüllt ist. (Wenn Sie hier beim Allgemeinfluss scheitern (wie die Aufgabensteller das im Moment tun), schränken sie die Aussage auf CW-Paare ein. Der Satz ist aber aus abstrakten Gründen auch in voller Allgemeinheit korrekt.)

Wir haben also eine Homologietheorie. Nun zum Zusatz:

Aufgabe 10.6. Konstruieren Sie einen Isomorphismus $\mathbb{S}_n(*) \rightarrow \pi_n^S$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 10.7. Zeigen Sie:

- Für jeden punktierten Raum (X, x) gilt $\mathbb{S}_n(X, x) \cong \text{Colim}_k \pi_{n+k}(S^k(X, x))$, wobei auch die Definition rechts Aufgabe 2 und ihren Beweis benutzt.
- Ist (X, x) ein punktierter CW-Komplex, so gilt $\mathbb{S}_n(X, x) \cong \text{Colim}_k \pi_{n+k}(\Sigma^k(X, x))$.