Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Wintersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 11*, 11.01.2012

Aufgabe 11.1. Sei $F : (\mathbb{Z}, \leq) \to \mathrm{Ab}$ ein System von abelschen Gruppen. Sei $m \in \mathbb{Z}$ und sei G das Quotientensystem von F, das durch

$$G_n = \begin{cases} F_n & \text{falls } n \leq m\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Dann induziert $F \to G$ Isomorphismen $\lim F \cong \lim G$ und $\lim^1 F \cong \lim^1 G$.

Aufgabe 11.2. Betrachte die abelschen Gruppen $F = \mathbb{Z}_{(2)}$ und $G = \mathbb{Z}_2^\wedge$. Wir filtrieren F und G durch

$$F_s = \begin{cases} 2^{-s}F & \text{falls } s \leq 0\,, \\ F & \text{falls } s \geq 0\,, \end{cases} \quad \text{und} \quad G_s = \begin{cases} 2^{-s}G & \text{falls } s \leq 0\,, \\ G & \text{falls } s \geq 0\,. \end{cases}$$

Bemerke, dass die Inklusion $F \to G$ kein Isomorphismus ist, obwohl sie Isomorphismen auf alle Filtrierungsquotienten induziert. Untersuche die Eigenschaften (erschöpfend, Hausdorff, vollständig) von diesen Filtrierungen.

Aufgabe 11.3. Sei R ein Ring, A ein rechter R-Modul und B ein linker R-Modul. Seien $P_* \xrightarrow{\epsilon} A$ und $Q_* \xrightarrow{\eta} B$ projektive Auflösungen von A und B. Wir hatten die Tor-Gruppen von A und B als die links-derivierte Funktoren $L_n(- \otimes_R B)(A)$ definiert, also

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) = H_n(P_* \otimes_R B, d \otimes \mathrm{id})\,.$$

Konstruiere einen Isomorphismus

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, B) \cong H_n(A \otimes_R Q_*, \mathrm{id} \otimes d)\,.$$

Hinweis: Bastele einen Doppelkomplex M mit $M_{p,q} = P_p \otimes_R Q_q$, und berechne die zwei assoziierten Spektralsequenzen, die gegen $H_*(\mathrm{Tot}(M))$ konvergieren.

Bemerkung: Eine entsprechende Aussage (mit analogem Beweis) gilt auch für die Ext-Gruppen $\mathrm{Ext}_R^n(A, B)$, die man mit einer projektiven Auflösung von A oder einer injektiven Auflösung von B berechnen kann.

Aufgabe 11.4. Sei $p : E \to X$ eine Überlagerung. Betrachte das offensichtliche lokale Koeffizienten-System $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F}_x = H_0(p^{-1}(x); \mathbb{Z})$. Beweise, dass der singuläre Ketten-Komplex $S_*(X; \mathcal{F})$ mit lokalen Koeffizienten isomorph zu $S_*(E; \mathbb{Z})$ ist.

---

*Abgabe: Montag 23.01.2012.

http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html