Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Wintersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 12*, 20.01.2012

Aufgabe 12.1. Bestimme die Serre-Spektralsequenz der Faserung

$$S^0 \to S^n \to \mathbb{R}P^n$$

für Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{F}_2$.

Aufgabe 12.2. Beweise die Existenz einer Faserung

$$F \to E \xrightarrow{p} B\,,$$

wobei E ein $K(\mathbb{Z}/4,1)$-Raum ist, B und F $K(\mathbb{Z}/2,1)$-Räume sind und $\pi_1(p) : \mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}/2$ surjektiv ist.

(a) Beweise, dass das induzierte lokale System $\mathcal{H}_*(F;\mathbb{Z})$ auf B einfach ist.
(b) Beschreibe den E^2-Term der assozierten Serre-Spektralsequenz in Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten.
(c) Die Homologie von dem $K(\mathbb{Z}/4,1)$-Raum E ist durch

$$H_n(E;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ \mathbb{Z}/4 & n \geq 1 \text{ ungerade}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Ist es möglich, mit diesem Kenntnis die Spektralsequenz zu berechnen?

Aufgabe 12.3. Sei $F \to E \to B$ eine Serre-Faserung, und sei $\mathbb{F}$ ein Körper. Wir nehmen an, dass das lokale System $\mathcal{H}_*(F;\mathbb{F})$ auf B einfach ist. Beweise, dass wenn $H_*(B;\mathbb{F})$ und $H_*(F;\mathbb{F})$ endlich-dimensionale $\mathbb{F}$-Vektorräume sind, dann ist $H_*(E;\mathbb{F})$ auch endlich-dimensional, und ferner gilt

$$\chi_{\mathbb{F}}(E) = \chi_{\mathbb{F}}(B)\chi_{\mathbb{F}}(F)\,.$$

Hier ist $\chi_{\mathbb{F}}(X)$ als $\sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_{\mathbb{F}} H_i(X;\mathbb{F})$ definiert.

Aufgabe 12.4. Sei E_* eine reduzierte Homologietheorie und sei X ein punktierter CW-Komplex. Für jedes $n \geq 0$ haben wir eine Kofaserfolge $X^{(n-1)} \to X^{(n)} \to X^{(n)}/X^{(n-1)}$, die einen exakten Dreieck in E_*-Homologie induziert. Setzt man diese Dreiecke nacheinander, so erhält man ein “unrolled exact couple”. Beschreibe den E^2-Term der assoziierten Spektralsequenz. Was liefert diese Spektralsequenz, wenn $E_* = H_*(-;\mathbb{Z})$?

---

*Abgabe: Montag 30.01.2012.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html`