Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Wintersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 13*, 27.01.2012

Aufgabe 13.1. Bestimme die Algebra $H^*(U(n);\mathbb{Z})$ durch Induktion über n mit Hilfe der Serre-Spektralsequenz der Faserung

$$U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}\,.$$

Bestimme ferner die Algebra $H^*(SO(n);\mathbb{F}_2)$ mit Hilfe der Faserung

$$SO(n-1) \to SO(n) \to S^{n-1}\,.$$

Aufgabe 13.2. Sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung mit B wegzusammenhängend und sei R ein Ring, so dass das System $\mathcal{H}^*(F;R)$ auf B trivial ist. Wir nehmen ferner an, dass für die Fasern $H^*(F_b;R) \cong H^*(S^n;R)$ mit $n \geq 1$ gilt. Konstruiere eine lange exakte Folge

$$\cdots \xrightarrow{p^*} H^m(E;R) \to H^{m-n}(B;R) \xrightarrow{\phi} H^{m+1}(B;R) \xrightarrow{p^*} H^{m+1}(E;R) \to \cdots\,.$$

Sei d_n das Differential von E_n, wobei $(E_r,d_r)_r$ die Serre-Spektralsequenz der Faserung für $H^*(-;R)$ ist. Sei i_n ein Erzeuger von $H^n(S^n;R)$ als R-Modul, und setze

$$e = d_n(i_n) \in H^{n+1}(B;R)\,.$$

Zeige, dass man ϕ als das Cup-Produkt mit e definieren kann.
Bemerkung: Die Klasse e heißt die *Euler-Klasse* und die Folge *die Gysin-Folge* der Faserung.

Aufgabe 13.3. Sei $k \geq 2$. Begründe (zum Beispiel mit dem Hinweis auf der Rückseite) die Existenz einer Faserung

$$S^{2k-1} \to E \to G^{\mathbb{C}}_{\infty,k}$$

mit E und $G^{\mathbb{C}}_{\infty,k-1}$ schwach homotopieäquivalent. Bestimme die Algebra $H^*(G^{\mathbb{C}}_{\infty,k};\mathbb{Z})$ mit Hilfe dieser Faserung.

Aufgabe 13.4. Bestimme die Algebra $H^*(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q})$ mit Hilfe der Faserung

$$K(\mathbb{Z},n-1) \to PK(\mathbb{Z},n) \to K(\mathbb{Z},n)\,.$$

Aufgabe 13.5. Wettbewerb†: Berechne

$$\bigoplus_{i=0}^{n} H^i(K(\mathbb{Z},3);\mathbb{Z})$$

inklusive multiplikative Struktur für möglichst großes n.

*Abgabe: Montag 06.02.2012.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html`
†Der erste Preis besteht aus 500g schweizer Schokolade.

Hinweis zur Aufgabe 13.3.

Sei $\gamma_{n,k} \longrightarrow G_{n,k} = G^{\mathbb{F}}_{n,k}$ das tautologische Bündel. Dies ist bekanntermaßen ein Unterbündel von $\mathbb{F}^n \times G_{n,k} \xrightarrow{pr_2} G_{n,k}$ und wir notieren das (orthogonal-) komplementäre Bündel als $\nu_{n,k}$. Desweiteren schreiben wir SV für das Sphärenbündel eines metrischen Vektorbündels. Im Klartext also etwa $S\nu_{n,k} = \big\{(V,x) \in S^{dn-1} \times G_{n,k} \mid x \perp V\big\}$, wo $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Dann ist die folgende Abbildung:

$$S\nu_{n,k} \longrightarrow G_{n,k+1},\ (V,x) \longmapsto V + \langle x \rangle$$

ein Faserbündel mit Faser $S\nu_{k+1,k}$. Die Faser ist durch Bilden orthogonaler Komplemente homöomorph zum Totalraum von $S\gamma_{k+1,1} \longrightarrow \mathbb{F}P^k$ und dieser wiederum ist durch Projektion auf die zweite Koordinate homöomorph zu S^{dk-1}.

Beweisen sie zunächst, dass die Bündelprojektion $S\nu_{\infty,k} \longrightarrow G_{\infty,k}$ einen Isomorphismus in Homologie induziert (sie ist sogar eine Homotopieq̈uivalenz). Wir erhalten also einen Faserbündel $S^{2k-2} \to E \to G^{\mathbb{C}}_{\infty,k}$ mit $E \simeq G^{\mathbb{C}}_{\infty,k-1}$.