Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Wintersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 2*, 14.10.2011

Aufgabe 2.1. Sei $(X, A, B, *)$ ein punktiertes Trippel, also $* \in B \subset A \subset X$. Beweise, dass die Folge

$$\cdots \to \pi_{n+1}(X, A, *) \xrightarrow{d_{n+1}} \pi_n(A, B, *) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, *) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, *) \to \cdots \to \pi_1(X, A, *)$$

exakt ist. Hier sind i_* und j_* von den Inklusionen induziert, und d_{n+1} ist die Verknüpfung

$$\pi_{n+1}(X, A, *) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(A, *) \to \pi_n(A, B, *).$$

Hinweis: Verknüpfe die entsprechenden exakten Folgen von Paaren, und jage im entstehenden Diagramm. Der gleiche Beweise liefert auch die lange exakte Homologiesequenz eines Trippels.

Aufgabe 2.2. Sei $(X, *)$ ein punktierter Raum. Wir haben die (reduzierte) Einhängung von $(X, *)$ als $\Sigma X = (X \times I)/[(X \times \partial I) \cup (\{*\} \times I)]$ definiert, mit der Klasse von $(*, 0)$ als Basispunkt. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Wir haben ein adjungiertes Paar von Funktoren $(\Sigma, \Omega) : \mathrm{HoTop}_* \to \mathrm{HoTop}_*$.

(b) Aus (a) gewinnen wir auf $[\Sigma X, -]_*$ eine natürliche Gruppenstruktur. Benutze dies um zu beweisen, dass ΣX eine Co-H-Gruppe (also eine Cogruppe in HoTop_*) ist.

(c) Sei X eine Co-H-Gruppe und Y eine H-Gruppe. Zeige, dass die zwei entstehenden Gruppenstrukturen auf $[X, Y]_*$ übereinstimmen und abelsch sind. Gebe hiermit einen zweiten Beweis, dass $\pi_n(Z, *)$ für $n \geq 2$ und Z beliebich abelsch ist.

Aufgabe 2.3. Sei $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Abbildungen von punktierten Räumen. Betrachte den Abbildungszylinder

$$\mathrm{Zyl}(f) := [Y \sqcup (X \times I)]/\sim,$$

wobei $\sim$ durch $f(x) \sim (x, 1)$ für $x \in X$ und $y_0 \sim (x_0, t)$ für $t \in I$ erzeugt ist. Beweise, dass man f, bis auf Verknüpfung mit einer Homotopieäquivalenz, durch eine Einbettung ersetzen kann, nämlich $i : X \to \mathrm{Zyl}(f), \quad x \mapsto [(x, 0)]$. Folgere daraus, dass $f_* : \pi_*(X, *) \to \pi_*(Y, *)$ in einer langen Homotopiefolge auftaucht.

Aufgabe 2.4. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildungen von punktierten Räumen und $n \geq 1$. Definiere $\pi_n(f)$ als die Menge der Homotopieklassen von Paaren von Abbildungen (α, β) mit

$$\begin{tikzcd} \partial I^n \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ I^n \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

und $\beta(J^{n-1}) = \{*\}$. Hier sind die Homotopien auch durch Paare (H, h) gegeben, mit (H_t, h_t) wie eben (α, β). Definiere eine geeignete Gruppenstruktur auf $\pi_n(f)$ für $n \geq 2$ und beweise, dass $\pi_n(f)$ und $\pi_n(\mathrm{Zyl}(f), X, *)$ isomorph sind.

---

*Abgabe: Montag 24.10.2011.

http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html