Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Wintersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 3*, 21.10.2011

Aufgabe 3.1. Seien (X, x) und (Y, y) wegzusammenhängende punktierte Räume, und sei $f : (X, x) \to (Y, y)$ eine Abbildung. Sei $n \geq 0$ gegeben. Beweise, dass f genau dann eine n-Äquivalenz ist, wenn das Paar $(\mathrm{Zyl}(f), X)$ n-zusammenhängend ist.

Aufgabe 3.2. Sei $(X, A, *)$ ein punktiertes Paar. Beweise, dass $\pi_1(A, *)$ auf der langen exakten Homotopiesequenz des Paares $(X, A, *)$ operiert (durch Morphismen von langen exakten Folgen). Insbesondere ist diese Folge (von $\pi_2(X, *)$ aufwärts) eine Sequenz von $\mathbb{Z}[\pi_1(A, *)]$-Moduln.

Aufgabe 3.3. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Jeder wegzusammenhängende H-Raum ist einfach.
(b) Jede H-Gruppe ist einfach.

Zur Erinnerung: In unserer Definition von H-Räumen wird Assoziativität nicht verlangt.

Aufgabe 3.4. Sei $(X, *)$ ein wegzusammenhängender H-Raum, so dass das Paar $(X \times X, X \vee X)$ die Homotopie-Erweiterungseigenschaft besitzt (erkläre: das gilt zum Beispiel, wenn X ein lokal-kompakter CW-Komplex ist). Beweise, dass das Produkt $X \times X \to X$ homotop zu einem Produkt ist, für welches $*$ eine strikte Einheit ist.

Aufgabe 3.5. Sei $(X, *)$ ein punktierter Raum. Sei $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$. Wir definieren den Moore-Schleifenraum

$$\Omega^M(X, *) = \{(t, w) \in \mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}_+} \mid w(0) = * \text{ und } w(s) = * \text{ falls } s \geq t\},$$

versehen mit der Teilraum Topologie von $\mathbb{R}_+ \times X^{\mathbb{R}_+}$, wobei $X^{\mathbb{R}_+}$ die KO-Topologie trägt. Wir definieren ein Produkt $\mu : \Omega^M(X, *) \times \Omega^M(X, *) \to \Omega^M(X, *)$ durch $\mu((s, v), (t, w)) = (s + t, u)$, wobei u die offensichtliche Zusammensetzung von v und w ist. Als Basispunkt von $\Omega^M(X, *)$ nehmen wir $* = (0, c_*)$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) $\Omega^M(X, *)$ ist ein topologisches Monoid.
(b) Die (unpunktierte) Inklusion $\Omega(X, *) \subset \Omega^M(X, *)$ ist ein Deformationsretrakt. Die Retraktion kann man punktiert wählen, und die Produkte sind kompatibel bis auf Homotopie.

*Abgabe: Montag 31.10.2011.
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html