Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Wintersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 5*, 4.11.2011

Aufgabe 5.1. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Verknüpfung von zwei Faserungen ist eine Faserung.
(b) Das Produkt von zwei Faserungen ist eine Faserung.
(c) Ist $p : E \to B$ eine Faserung mit B wegzusammenhängend und $E \neq \emptyset$, so ist p surjektiv.
(d) Sei gegeben ein Pull-Back

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

wobei p eine Faserung ist. Beweise, dass q dann auch eine Faserung ist. Im punktierten Fall, beweise dass die Einschränkung von f einen Homöomorphismus $Z \to F$ induziert, wobei Z und F die Fasern von q, bzw. p sind.

Aufgabe 5.2. Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Sei $B = [0,1]$, und sei $p : E \to B$ die Einschränkung der Projektion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Abbildung p ist eine Faserung.
(b) Die Abbildung p ist kein Faserbündel.

Aufgabe 5.3. Sei $n \geq 1$. Berechne $\pi_m(\mathbb{R}P^n, *)$ und $\pi_\ell(\mathbb{C}P^n, *)$ für so viele Werte von m und ℓ wie möglich.

Aufgabe 5.4. Sei $X_0 = \{*\} \subset X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$ eine Folge von Inklusionen von Hausdorffräumen, und sei $X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ mit der schwache (i.e. der Colimites-) Topologie versehen.

(a) Beweise, dass die Homomorphismen $\pi_*(X_n, *) \to \pi_*(X, *)$, die von der Inklusion induziert sind, einen Isomorphismus

$$\mathrm{Colim}_n\, \pi_*(X_n, *) \to \pi_*(X, *)$$

induzieren.
(b) Berechne $\pi_*(\mathbb{R}P^\infty, *)$ und $\pi_*(\mathbb{C}P^\infty, *)$.

---

*Abgabe: Montag 14.11.2011.
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html