Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Wintersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 7*, 18.11.2011

Aufgabe 7.1. Sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung, $e \in E$ und $b = p(e)$. Sei $i : (F, e) \to (E, e)$ die Inklusion der Faser. Sei $n \geq 0$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Falls i homotop relativ $\{e\}$ zur konstanten Abbildung ist, so haben wir eine kurze exakte Folge
$$0 \to \pi_{n+1}(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_{n+1}(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e) \to 0,$$
und ∂ besitzt einen Schnitt.

(b) Wir haben Isomorphismen
$$\pi_n(S^4, *) \cong \pi_n(S^7, *) \oplus \pi_{n-1}(S^3, *).$$
Insbesondere gilt $\pi_7(S^4, *) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_6(S^3, *)$.

Aufgabe 7.2. Sei X ein punktierter Raum. Wir identifizieren hier $\pi_n(X)$ mit $[S^n, X]_*$ und definieren das Kompositionsprodukt als
$$\pi_p(X) \times \pi_q(S^p) \xrightarrow{\circ} \pi_q(X), \quad ([f], [\alpha]) \mapsto [f] \circ [\alpha] := [f\alpha].$$
Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Das Kompositionsprodukt ist wohldefiniert, natürlich in X und assoziativ im Sinne, dass $([f] \circ [\alpha]) \circ [\beta] = [f] \circ ([\alpha] \circ [\beta])$ in $\pi_r(X)$, für $\beta \in \pi_r(S^q)$.

(b) Für $[\alpha_1], [\alpha_2] \in \pi_q(S^p)$ gilt
$$[f] \circ ([\alpha_1] + [\alpha_2]) = [f] \circ [\alpha_1] + [f] \circ [\alpha_2].$$

(c) Sei $h \in \pi_3(S^2)$ ein Erzeuger, und $1 = [\mathrm{id}_{S^2}] \in \pi_2(S^2)$. Dann gilt $(-1) \circ h = h \in \pi_3(S^2)$. Insbesondere ist $- \circ [\alpha]$ nicht notwendigerweise additiv.

(d) Sei $\beta \in \pi_{q-1}(S^{p-1})$. Dann ist $- \circ \Sigma_*[\beta] : \pi_p(X) \to \pi_q(X)$ additiv.

(e) Die Klasse $2h$ liegt im Kernel von $\Sigma_* : \pi_3(S^2) \to \pi_4(S^3)$. Insbesondere hat $\pi_4(S^3) \cong \pi_1^s$ die Ordnung 1 oder 2.

Aufgabe 7.3. Seien $(X, *)$ und $(Y, *)$ punktierten CW-Komplexe mit X k-zusammenhängend und Y ℓ-zusammenhängend. Wir setzen voraus, dass X oder Y lokal-kompakt ist. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Das Paar $(X \times Y, X \vee Y)$ ist $(k + \ell + 1)$-zusammenhängend. Insbesondere ist $X \wedge Y$ auch $(k + \ell + 1)$-zusammenhängend.

(b) Die Inklusionen induzieren einen Isomorphismus $\pi_n(X, *) \oplus \pi_n(Y, *) \to \pi_n(X \vee Y, *)$ für alle $1 \leq n \leq k + \ell$.

(c) Sei A eine Menge und $n \geq 2$. Die Inklusionen induzieren einen Isomorpismus
$$\bigoplus_{a \in A} \pi_n(S^n) \to \pi_n(\bigvee_{a \in A} S^n).$$

Aufgabe 7.4. Sei $1 \leq n < \infty$. Beweise: $\mathbb{R}P^n$ ist genau dann einfach, wenn n ungerade ist.

---

*Abgabe: Montag 28.11.2011.
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html