Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Wintersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 8*, 25.11.2011

Aufgabe 8.1 (Präsenzaufgabe am 30.11)**.** Beweise Theorem 3.21 aus der Vorlesung über die Existenz von Eilenberg-Mac Lane Räumen.

Aufgabe 8.2. Beweise, dass es schwache Homotopieäquivalenzen $\Omega\mathbb{R}P^\infty \to S^0$, $\Omega\mathbb{C}P^\infty \to S^1$, $\Omega\mathbb{H}P^\infty \to S^3$ und $\Omega G^{\mathbb{F}}_{\infty,n} \to G(n)$ gibt (wobei $G(n) = O(n), U(n)$ für $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).
Bemerkung: Milnor† hat bewiesen, dass falls (X, x) ein punktierter CW-Komplex ist, so hat $\Omega(X, x)$ auch den Homotopietyp eines CW-Komplexes. Insbesondere sind die obigen Räume sogar homotopieäquivalent.

Aufgabe 8.3. Beweise, dass Lemma 3.3 aus der Vorlesung auch für $n = \infty$ gilt.

Aufgabe 8.4. Sei $\mathcal{CW}$ die Kategorie der CW-Komplexe und stetigen Abbildungen, und sei $F : \mathcal{CW} \to \mathcal{D}$ ein homotopieinvarianter Funktor (also $F(f) = F(g)$ wenn f und g homotope Abbildungen sind). Sei $G : \mathcal{CW} \to \mathcal{T}op$ der Vergissfunktor. Beweise, dass ein homotopieinvarianter Funktor $H : \mathcal{T}op \to \mathcal{D}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

(a) $F = HG$, und
(b) H bildet schwache Homotopieäquivalenzen auf Isomorphismen ab.

Zeige, dass solch ein Funktor H eindeutig bis auf natürlichen Isomorphismus ist.

Aufgabe 8.5. Betrachte die folgenden Teilräume des $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$.

(a) $X = \{0\} \cup \{1/n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$,
(b) Der “Warschauer Kreis” Y, gegeben durch

$$\begin{aligned} Y = &([-1, 0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin(\pi x^{-1})) \,|\, 0 < x \leq 1\} \\ &\cup (\{\pm 1\} \times [-2, 0]) \cup ([-2, 2] \times \{-2\}). \end{aligned}$$

Beweise, dass X und Y keine CW-Strukturen besitzen. Finde CW-Approximationen von X und Y.

Aufgabe 8.6. Seien X und Y CW-Komplexe. Sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen, und bezeichne mit $X \times_k Y$ die Menge $X \times Y$, versehen mit der schwachen Topologie bezüglich der abgeschlossenen Zellen. Beweise, dass die Identität

$$i : X \times_k Y \to X \times Y$$

eine CW-Approximation ist.

---

*Abgabe: Montag 12.12.2011.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html`

†Corollary 3 in: J. W. Milnor, *On spaces having the homotopy type of a* CW*-complex*, Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 1959, 272–280