Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Wintersemester 2011

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE II

Blatt 9*, 9.12.2011

Aufgabe 9.1. Sei (X, A, a) ein punktiertes Paar, seien $\alpha, \beta \in \pi_2(X, A, a)$, und sei

$$\partial : \pi_2(X, A, a) \to \pi_1(A, a)$$

der Rand. Beweise, dass

$$\alpha \cdot \partial(\beta) = \beta^{-1}\alpha\beta$$

gilt, und dass $\pi_2^{\#}(X, A, a)$ abelsch ist.

Aufgabe 9.2. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Jede glatte, geschlossene und einfach-zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homotopieäquivalent zu S^3.

(b) Ist F eine glatte, geschlossene und zusammenhängende Fläche, und ist $\pi_1(F)$ unendlich, so ist die universelle Überlagerung von F zusammenziehbar. Insbesondere ist $\pi_1(F)$ die einzige nicht-triviale Homotopiegruppe von F.

Bemerkung: Hier darf man den Satz verwenden, dass glatte geschlossene Mannigfaltigkeiten eine CW-Zerlegung besitzen (siehe z. B. Theorem 3.5 in "J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press").

Aufgabe 9.3. Beweise die folgende Ergänzung des Satzes von Hurewicz:

Ist $n \geq 2$ und ist X $(n-1)$-zusammenhängend, so ist

$$h_{n+1} : \pi_{n+1}(X, *) \to H_{n+1}(X, *; \mathbb{Z})$$

surjektiv.

Bemerke, dass $X = S^1 \times S^1$ ein Gegenbeispiel zur entsprechenden Aussage für $n = 1$ ist.

Aufgabe 9.4. Beweise die folgenden Aussagen, und erkläre wovon sie (Gegen-)Beispiele sind.

(a) Die Homologiegruppen von $\mathbb{C}P^3$ und $S^2 \times S^4$ sind isomorph, aber die Homotopiegruppen nicht.

(b) Seien D^3_- und D^3_+ die Sud und Nordhemisphären von S^3. Dann induziert die Inklusion

$$(D^3_+, S^2) \to (S^3, D^3_-)$$

einen Isomorphismus in Homologie, aber nicht in Homotopie.

(c) $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$ und S^2 haben isomorphe Homotopiegruppen, sind aber nicht homotopieäquivalent. Die gleiche Aussage gilt für $S^n \times \mathbb{R}P^m$ und $S^m \times \mathbb{R}P^n$ wenn m, n geeignete Werte haben (und hierbei handelt es sich um endliche CW-Komplexe!).

---

*Abgabe: Montag 19.12.2011.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html`