(1)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}(C,A) \arrow[r, "h"] & H^{n+1}(K(C,n), A) \\
\Xi(C,A) \arrow[u, "\Theta"] \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & O(C,n,A,n+1) \arrow[u, "ev_n"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\gamma : \pi_n(K(C,n),*) \arrow[r, "\cong"] & C \\
H_n(K(C,n),*;\mathbb{Z}) \arrow[u, "\cong"', "Hw."] \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

$K := (K(C,n),*)$

$$\begin{tikzcd}
\Rightarrow B_n(K) \arrow[r, "i"] & Z_n(K) \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & H_n(K,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\gamma"] \\
& & C
\end{tikzcd}$$

ist freie Aufl. von C

Geg. $0 \to A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{q} C \to 0 =: \xi$

oben lang: direkt als erstes das, was ich in der Übung versockt habe. Die lange exakte Ext-Sequenz um Θ zu bestimmen:

$$\begin{tikzcd}
& 0 & 0 & 0 & \\
& \mathrm{Ext}(C,A) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}(B,A) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Ext}(C,C) \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(B_nK, A) \arrow[r, "p"] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(B_nK, B) \arrow[r, "q"] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(B_nK, C) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z_nK, A) \arrow[r, "p"] \arrow[u, "i"] & \mathrm{Hom}(Z_nK, B) \arrow[r, "q"] \arrow[u, "i"] & \mathrm{Hom}(Z_nK, C) \arrow[r] \arrow[u, "i"] & 0 \\
& \mathrm{Hom}(C,A) \arrow[r] \arrow[u, "f"] & \mathrm{Hom}(C,B) \arrow[r] \arrow[u, "f"] & \mathrm{Hom}(C,C) \arrow[u, "f"] \arrow[uuull, bend right, "\delta"'] & \\
& 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Wir wissen die Zeilen sind exakt da B_nK und Z_nK frei sind. und da $\mathrm{Hom}(-,X)$ links exakt ist, folgt die Exaktheit der Spalten unten und in der Mitte, nach Def. von Ext (wenn man $B_n \to Z_n \to C$ als Auflösung benutzt) die oben.

Der Randoperator (die eingezeichneten Dinger) tut also folgendes mit id_C:

(nach Def.)

$$\begin{tikzcd}
B_nK \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha'"] & Z_nK \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "f"] & H_n(K,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\gamma"] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

repr. $\delta(id_C)$

Komponiere mit f
(lande also bei $f : Z_n \to C$)
Wähle Lift $\alpha : Z_n \to B$
Schränke α auf $B_n \to B$ ein
Wähle Lift $\alpha' : B_n \to A$
nehme Restklasse

Also

$[\alpha'] = \Theta(\xi)$

Nun ein Teil der an der Tafel stand: h wird induziert von

2

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "0"] & \vdots \arrow[d, "d"] & \vdots \arrow[d, "0"] & \\
0 \arrow[r] & Z_{n+1}K \arrow[r, hook] \arrow[d, "0"] & S_{n+1}K \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & B_nK \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_nK \arrow[r, hook] \arrow[d, "0"] & S_nK \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"] & B_{n-1}K \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

ist exakte Sequenz von vert. Kettenkomplexen da frei sind

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & \mathrm{Hom}(Z_{n+1}K, A) \arrow[l] \arrow[u, "0"] & S^{n+1}(K,A) \arrow[l] \arrow[u, "\delta"] & \mathrm{Hom}(B_nK, A) \arrow[l, "\delta"'] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[l] \\
0 & \mathrm{Hom}(Z_nK, A) \arrow[l] \arrow[u, "0"] & S^n(K,A) \arrow[l] \arrow[u, "\delta"] & \mathrm{Hom}(B_{n-1}K, A) \arrow[l, "\delta"'] \arrow[u, "0"] & 0 \arrow[l] \\
 & \vdots \arrow[u, "0"] & \vdots \arrow[u, "\delta"] & \vdots \arrow[u, "0"] &
\end{tikzcd}$$

ist immer noch exakte Sequenz von CoKK's. die von δ in Homologie induzierte Abb. faktorisiert nach dem UCT wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
\delta : \mathrm{Hom}(B_nK, A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^{n+1}(K,A) \\
 & \mathrm{Ext}(C,A) \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

Es folgt

$$(h \circ \Theta)(\xi) = h[\alpha'] = [\delta \alpha'] = [\alpha' \circ d]$$

$$S_{n+1}K \xrightarrow{d} B_nK \xrightarrow{\alpha'} A$$

„unten lang": Die Fundamentalklasse $\iota_n \in H^n(K,C)$

③ wird per definitionem von einer Abb

$g: S_nK \longrightarrow C$ repräsentiert, die ein Cozykel ist, also $g|_{B_nK} = 0$

und $g|_{Z_n}: Z_nK \longrightarrow C$

$= \quad Z_nK \longrightarrow H_n(K,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\gamma} C$

Hierauf wollen wir den Randoperator der LEF von

$$0 \to S^*(K,A) \to S^*(K,B) \to S^*(K,C) \to 0$$

Dieser entsteht wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S_{n+1}(K),A) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(S_{n+1}K,B) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(S_{n+1}K,C) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S_nK,A) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(S_nK,B) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Hom}(S_nK,C) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ull, bend right] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Dabei passiert mit g folgendes:

$$\begin{tikzcd}
 & S_{n+1}K \arrow[r, "d"] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon'"'] & S_nK \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"'] \\
A \arrow[r, hook] & B \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

Also $\beta_\xi(\iota_n) = [\varepsilon']$. Die beiden Lifting-Probleme sind jetzt aber „äquivalent": Haben wir ε gewählt so ist $\varepsilon_{|Z_n}$ eine zulässige Wahl von α und für hiezu passendes α' ist α' auch eine zulässige Wahl von ε':

④

$$\begin{tikzcd}
S_{n+1}K \arrow[rrr, "d"] \arrow[dd, "\varepsilon'"'] \arrow[dr, "d"] & & & S_nK \arrow[ddl, "\varepsilon"'] \arrow[ddr, "g"] & \\
& B_nK \arrow[rr, hook] \arrow[urr] \arrow[dl, "\alpha'"] & & Z_nK \arrow[u, hook, "j"'] \arrow[r, two heads] \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[dr] & H_n(K,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\gamma"] \\
A \arrow[rr] & & B \arrow[rr, "f"] & & C
\end{tikzcd}$$

und dann sind wir fertig!

Sorry für meine Konfusion.