## Eine Lösung von Aufgabe 10. b + c



Sei $i, j \geq 1$, $n = i+j$. Wir haben ein komm. Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^i \times \mathbb{C}^j & \xrightarrow{f_i \times f_j} & \mathbb{C}^i \times \mathbb{C}^j & \xhookrightarrow{h_i \times h_j} & \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \\ \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu_{ij} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{C}^n & \xhookrightarrow{h_n} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

Hier ist $h_k : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}P^k$ eine lokale Parametrisierung der (glatte) Mannig. $\mathbb{C}P^k$, gegeben durch $(b_1, \dots, b_k) \mapsto [1, b_1, \dots, b_k]$
(In unsere Beschreibung von $\mathbb{C}P^k$ mit Polynome entspricht also $\mathbb{C}^k$ die normierte Polynome: $(b_1, \dots, b_k) \leftrightarrow X^k + b_1 X^{k-1} + \dots + b_k$).
Die Ab. $\mu$ ist also Multiplikation von normierten Polynomen.

Die Ab. $f_k : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k$ bildet $(a_1, \dots, a_k)$ auf das Polynom $(X - a_1) \cdots (X - a_k) = X^k + \sigma_1^k(\underline{a}) X^{k-1} + \dots + \sigma_k^k(\underline{a})$
Hier ist $\sigma_j^k(\underline{a})$ der $j$-te Symmetrische Polynom gewertet auf $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)$, also

$$\sigma_j^k(\underline{a}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_j} .$$

Es ist klar, dass das Diagramm kommutiert. $f_k$ ist holomorph.

<u>Lemma 1</u>: $\det(df_k(\underline{a})) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$

Beweis: Induktion auf $k$. Es ist leicht zu berechnen, dass

$$(df_k(\underline{a}))_{i,j} = \sigma_{i-1}^{k-1}(s_j(\underline{a}))$$

wobei $s_j(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, \check{a}_j, \dots, a_k)$ (i.e. $a_j$ ausgelassen).
Insbesondere für $k = 1$, $df_1(\underline{a}) = (1)$, $1 = \prod_{\emptyset}$.
Sei nun $k \geq 2$ und die Formel korrekt für $k-1$.
In $df_k$, substrahiere die 1-Spalte von allen anderen; dann ist die erste Zeile $1, 0, \dots, 0$, und die $i$-te Spalte, für $2 \leq i \leq k$, ist ein Vielfaches von $(a_1 - a_i)$; stellt man diese Faktoren ausserhalb

② 

der Determinante erhält man

$$(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_k)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \vdots & df_{k-1}(s_1 \underline{a}) \\ * & \end{vmatrix}$$

und die Formel für $k$ folgt per Induktion. Statt dies mit allgemeinen Formeln zu beweisen bearbeiten wir den Fall $k=3$ als Beispiel:

$$|df_3(a,b,c)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & (a-b)c & (a-c)b \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{vmatrix}$$

und $|df_2(b,c)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & b \end{vmatrix} = (b-c)$. (Ein schönerer Beweis?) #

<u>Lemma 2</u>: Seien die Koordinaten von $\underline{a} \in \mathbb{C}^k$ paarweise verschieden. Betrachte $f_k$ als Ab. $g_k : \mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k}$, mit $dg_x \in M_{2k}(\mathbb{R})$. Dann gilt $\det(dg_k(\underline{a})) > 0$.

<u>Beweis</u>: $\det(dg_k(\underline{a})) \neq 0$ weil $\det(df_k) \neq 0$. Also $\det(dg_k(\underline{a})) = \det(df_k)\cdot\overline{\det(df_k)} > 0$. #

<u>Lemma 3</u>: Sei $\underline{a} \in \mathbb{C}^k$ mit paarweise verschiedenen Koordinaten. Dann existieren offene Umgeb. $V$ von $\underline{a}$ und $U$ von $f_k(\underline{a})$ so dass $f_k|_V : V \to U$ ein Homöo ist, und $f_k|_V : V \to \mathbb{C}^k$ ist Homotop zur Inklusion.

<u>Beweis</u> Dank Lemma 2 ist $dg_k(\underline{a})$ ein Iso, also $g_k$ ist ein Diffeo von einer offene Umgebung von $\underline{a}$ zu einer of. Umgeb. von $f_k(\underline{a})$. Für den 2. Teil verwende Lemma 2, Seite 34 aus Milnor, "Topology from the differential viewpoint" (siehe Kopie).

Nun wähle $f \in \mathbb{C}P^n$ mit $f \in h_n(\mathbb{C}^n)$ und $f$ hat paarweise verschiedene Wurzeln.

$\mathbb{C}P^n \setminus f \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$ und es folgt $H_{2n}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\cong} H_{2n}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n \setminus f)$ $\xleftarrow{\cong} H_{2n}(V_f, V_f \setminus f)$ (z. Tw Ausschneidung), mit $V_f$ klein genug offene Umgebung $f \in V_f \subset h_n(\mathbb{C}^n)$. (Ebenso für $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$).

$W = \{w_1, \dots, w_\ell\} = \mu_{i,j}^{-1}(f)$, $\ell = \binom{n}{i}$.

Betracht das kommutativ Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_{2n}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{ij*}"] & H_{2n}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j, \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \setminus W) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mu_{ij*}"] & \bigoplus_{w \in W} H_{2n}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j, \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \setminus w) \\
H_{2n}(\mathbb{C}P^n) \arrow[r, "\cong"] & H_{2n}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n \setminus f) \arrow[r, "\cong"] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\xrightarrow{\cong} \bigoplus_{w \in W} H_{2n}(V_w, V_w \setminus w)$$
$$\downarrow \mu_*$$
$$\xrightarrow{\cong} H_{2n}(V_f, V_f \setminus f)$$

Wir haben: $u_i \times u_j \in H_{2n}(\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j)$ bestimmt einen Erzeuger $\alpha_w \in H_{2n}(V_w, V_w \setminus w)$, und $\mu_*(\alpha_w) = \beta_w$ ist ein Erzeuger von $H_{2n}(V_f, V_f \setminus w)$ ($V_w$ so gewählt, dass $\mu: (V_w, w) \to (V_f, f)$ ein Homöo ist).

Dank Lemma 3 wissen wir: $\beta_w = \beta_{w'}$ $\forall\, w, w' \in W$.

Also $u_i \times u_j \longmapsto \sum_{w \in W} \alpha_w$

$$\downarrow$$

$$\sum_{w \in W} \beta_w = \binom{n}{i} \beta_w .$$

Daraus folgt $(\mu_{ij})_*(u_i \times u_j) = \pm \binom{n}{i} u_{i+j}$.

(c) $H_*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots] \Big/ \left\langle \gamma_i \cdot \gamma_j = \binom{i+j}{i} \gamma_{i+j} \right\rangle$

(Divided Power Algebra).

(1)

**Lemma 2.** *Any orientation preserving diffeomorphism $f$ of $R^m$ is smoothly isotopic to the identity.*

(In contrast, for many values of $m$ there exists an orientation preserving diffeomorphism of the sphere $S^m$ which is not smoothly isotopic to the identity. See [20, p. 404].)

PROOF. We may assume that $f(0) = 0$. Since the derivative at 0 can be defined by

$$df_0(x) = \lim_{t \to 0} f(tx)/t,$$

it is natural to define an isotopy

$$F : R^m \times [0, 1] \to R^m$$

by the formula

$$F(x, t) = f(tx)/t \quad \text{for} \quad 0 < t \leq 1,$$
$$F(x, 0) = df_0(x).$$

To prove that $F$ is smooth, even as $t \to 0$, we write $f$ in the form*

$$f(x) = x_1 g_1(x) + \cdots + x_m g_m(x),$$

where $g_1, \cdots, g_m$ are suitable smooth functions, and note that

$$F(x, t) = x_1 g_1(tx) + \cdots + x_m g_m(tx)$$

for all values of $t$.

Thus $f$ is isotopic to the linear mapping $df_0$, which is clearly isotopic to the identity. This proves Lemma 2.

(2)

LEMMA 2.1. Let $f$ be a $C^\infty$ function in a convex neighborhood $V$ of 0 in $\mathbf{R}^n$, with $f(0) = 0$. Then

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

for some suitable $C^\infty$ functions $g_i$ defined in $V$, with $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

PROOF:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \ldots, tx_n)}{dt}\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n) \cdot x_i \, dt .$$

Therefore we can let $g_i(x_1, \ldots, x_n) = \int^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} (tx_1, \ldots, tx_n)\, dt$ .

Milnor : (1) Topology from the diff. Viewpoint

(2) Morse Theory