Seminar:
Topologie
Die Theorie der Faserbündel

Homotopie Theorie

Peter Larysch

Ausarbeitung zum Vortrag vom
13.10.2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Bei der Klassifizierung von Räumen bedient man sich verschiedener Eigenschaften. Die strengste Äquivalenz ist dabei der Homöomorphismus, nämlich dann, wenn zwischen den Räumen eine stetige Bijektion existiert, und die Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.
Die Stetigkeit von Abbildungen auf topologischen Räumen, die ja über offene Mengen definiert sind, ist bekanntermaßen die Eigenschaft, dass Urbilder offener Mengen offen sind.
Ganz einfache topologische Eigenschaften, die über offene Mengen definiert sind, wie z.B. Kompaktheit, Zusammenhang oder Hausdorffeigenschaft können topologische Räume zwar unterscheidbar machen, diese Unterscheidungen sind jedoch nicht sinnvoll, um geeignete Klassen von Räumen zu erhalten, auf denen sich bestimmte Probleme betrachten lassen.
Einen Mittelweg bildet hier eine Konstruktion, die topologische Räume in eine algebraische Struktur abbildet, auf der dann eine Unterscheidung vorgenommen wird. Die im weiteren Verlauf vorgestellten Homotopiegruppen lassen so eine vereinfachte und doch für viele interessante Anwendungen genügend starke Klassifizierung topologischer Räume zu.

1 Topologische Räume

1.1 Konstruktionen von topologischen Räumen

Es können aus vorhandenen topologischen Räumen neue Räume konstruiert werden, die auf natürliche Weise Topologien durch die ihnen zugrunde liegenden topologischen Räume erhalten.
Dies wären z.B. **Teilräume**:
Sei (X,τ) ein topologischer Raum X mit Topologie τ. Wenn Y eine Teilmenge von X ist, dann ist das System $\tau_Y := \{Y \cap U : U \in \tau\}$, also die Menge aller Durchschnitte von in X offenen Mengen mit Y, eine Topologie auf Y, genannt **Teilraumtopologie**, und macht Y zum **Teilraum** von X.
Produkträume:
Seien X,Y topologische Räume. Die **Produkttopologie** auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ der Mengen X,Y ist die Topologie mit Basis $\mathscr{B} = \{U \times V : U \text{offen in} X, V \text{offen in} Y\}$, dem System aller Produkte von in je X und Y offenen Mengen. Diese macht $X \times Y$ zum **Produktraum**. Allgemein für potentiell unendliche Indexmengen J gilt: Die Urbilder $\pi_i^{-1}(U_i)$ der in X_i offenen Mengen U_i bilden eine Subbasis der Produkttopologie.
Die Produkttopologie macht alle kanonischen Projektionen auf die einzelnen Faktoren stetig sind. Das Universalkriterium für Abbildungen auf Produkträumen lautet daher: $f : Y \to \prod_{i \in J} X_i$ stetig $\Leftrightarrow \pi_i \circ f : Y \to X_i$ stetig $\forall i \in J$.
sowie **Quotientenräume**:
Ist Y beliebig, (X,τ) topologischer Raum und $q : X \to Y$ beliebige surjektive Abbildung, dann existiert genau eine Topologie auf Y bzgl. derer q eine Quotientenabbildung ist, d.h. dass Teilmengen $U \subset Y$ offen sind genau dann, wenn $q^{-1}(U)$ offen in X sind. Diese Topologie ist die durch q induzierte **Quotiententopologie**. Üblicherweise ist q dabei eine Abbildung $q(x) := [x]$, die jedem $x \in X$ ein Äquivalenzklasse zuordnet bzgl. einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf X. $Y := X/\sim = \{[x] : x \in X\}$ ist so der **Quotientenraum** aller Äquivalenzklassen von X.
Anschaulich kann man sagen, dass in Quotientenräumen die durch die Äquivalenzrelation identifizierten Punkte zusammengeschlagen bzw. Teilräume miteinander verklebt werden.
Für die weiteren Konstruktionen benötigt man den Begriff der **punktierten Räume**. Dies sind topologische Räume X mit einem besonders ausgezeichneten Punkt $x_0 \in X$, dem so genannten **Basispunkt**. Daher stammt auch die alternative Bezeichnung basierte Räume, die Notation lautet: (X,x_0).
Sind nun (X,x_0),(Y,y_0) zwei punktierte Räume, dann definiert man $X \wedge Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ das **Wedge-Produkt** als Teilraum des Produkts $X \times Y$.
Damit wird dann das **reduzierte Produkt** bzw. Smash-Produkt definiert als Quotientenraum
$X \vee Y := X \times Y / X \wedge Y$.
Des weiteren kann man mit $I = [0,1]$ den **Kegel** über (X,x_0) definieren als $CX := (X \times I)/X \times 1$ sowie die **reduzierte Einhängung** von (X,x_0): $\Sigma X := (X \times I)/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I)$, die einen Doppelkegel darstellt mit identifizierten d.h. zusammengeschlagenen Teilräumen $X \times \{0\}$, $X \times \{1\}$ und $\{x_0\} \times I$.
Außerdem soll hier noch der Begriff der lokalen Kompaktheit eingeführt werden, der neben den bekannten topologischen Eigenschaften im weiteren Verlauf Verwendung finden wird: Ein topologischer Raum X heißt **lokal kompakt**, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine kompakte Teilmenge von X existiert, die eine Umgebung von x enthält, bzw. ein hausdorffscher Raum X heißt lokal kompakt, wenn $\forall x \in X$ und für alle Umgebungen von x eine Umgebung W von x existiert, die kompakten Abschluss hat, der in U liegt: $x \in W \subset \overline{W} \subset U$.

1.2 Abbildungsräume

Eine besondere Klasse topologischer Räume bilden die **Abbildungsräume**. Dies sind allgemein Teilräume von $\mathscr{C}(X,Y)$, der Menge aller stetigen Abbildungen $f : X \to Y$ mit einer geeigneten Topologie, bzw. der Räume $\mathscr{C}_0(X,Y)$ mit punktierten bzw. basispunkterhaltenden Abbildungen $(X,x_0) \to (Y,y_0)$ als Elemente.

Die basispunkterhaltenden Abbildungen bilden dabei stets den Basispunkt x_0 von X auf den Basispunkt y_0 von Y ab, d.h. $f(x_0) = y_0$ für $f \in \mathscr{C}_0(X,Y)$.
Ein Spezialfall von Abbildungsräumen, der im weiteren Verlauf wichtig sein wird, sind die **Schleifenräume** $\Omega(X) = \Omega(X,x_0) := \mathscr{C}_0(S^1,X)$ bzw. $\Omega^n(X) := \mathscr{C}_0(S^n,X)$ der basispunkterhaltenden Abbildungen von der n-Sphäre, also der Einheitssphäre $\{x : ||x|| = 1\}$ im $\mathbb{R}^{n+1}$, auf X.
Es gibt einige nützliche Topologien, mit den man $\mathscr{C}_0(X,Y)$ versehen kann. Dies wären z.B. die **Topologie der punktweisen Konvergenz**, bei der ein typisches Basiselement um die Abbildung f aus allen Abbildungen g besteht, die in endlich vielen Punkten nah an f liegen oder die **Topologie der kompakten Konvergenz** bzw. der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen, bei der ein typisches Basiselement um f aus allen Abbildungen g besteht, die an allen Punkten einer kompakten Menge nah an f liegen.
Über besonders gute Eigenschaften für die weitere Betrachtung verfügt jedoch die **kompakt-offene Topologie**, die mit der Topologie der kompakten Konvergenz übereinstimmt, jedoch ohne Metrik auskommt.
Definition:
Seien X,Y topologische Räume, $K \subset X$ kompakt, $U \subset Y$ offen.

$$\mathscr{O}(K,U) = \{f : f \in \mathscr{C}(X,Y), f(K) \subset U\}$$

definiert die Menge der stetigen Abbildungen, die die kompakte Menge K auf die offene Menge U abbilden. $\mathscr{O}(K,U)$ bilden für alle K und U eine Subbasis für die **kompakt-offene Topologie** auf $\mathscr{C}(X,Y)$.
Diese verfügt über zwei wichtige Eigenschaften, die mit der **natürlichen Abbildung**
$\theta : \mathscr{C}(X \times Z,Y) \to \mathscr{C}(Z,\mathscr{C}(X,Y))$ zusammenhängen. θ ordnet dabei jeder Abbildung aus dem Produktraum $X \times Z$ auf Y eine Abbildung aus Z in den Abbildungsraum $\mathscr{C}(X,Y)$ zu. Es gilt:
Proposition 1:
Sei X lokal kompakt, hausdorffsch, $\mathscr{C}(X,Y)$ versehen mit kompakt-offener Topologie. Dann ist die Abbildung $e : X \times \mathscr{C}(X,Y) \to Y$ definiert als $e(x, f) = f(x)$, gennant **Auswertungsabbildung**, stetig.
(Zum Beweis siehe S. 287 [Hus94])
Proposition 2:
Seien X,Y,Z beliebige topologische Räume und $f : X \times Z \to Y$ stetig, dann definiert $(\hat{F})(x) = f(x,z)$ eine stetige Abbildung $\hat{F} : Z \to \mathscr{C}(X,Y)$. Sei $\hat{f} : Z \to \mathscr{C}(X,Y)$ stetig und X lokal kompakt und hausdorffsch, dann definiert $F(x,z) = (\hat{f}(z))(x)$ eine stetige Abbildung $F : X \times Z \to Y$.
(Zum Beweis siehe S. 47 [FR04]). Es folgt:
Proposition 3:
Die Abbildung $\theta : \mathscr{C}(X \times Z,Y) \to \mathscr{C}(Z,\mathscr{C}(X,Y))$ ist stetig für beliebige topologische Räume X,Y,Z definiert durch $f \mapsto \hat{F}$. Die Abbildung $\hat{\theta} : \mathscr{C}(Z,\mathscr{C}(X,Y)) \to \mathscr{C}(X \times Z,Y)$ ist stetig für X lokal kompakt hausdorffsch und Z hausdorffsch definiert durch $\hat{f} \mapsto F$. Insbesondere gilt, wenn beide stetig sind, dass θ ein Homöomorphismus ist mit der Inversen $\hat{\theta}$.
(Zum Beweis siehe S. 48 [FR04] bzw. S. 531 [Hat02])
Dieser Homöomorphismus bildet dann das so genannte **Exponentialgesetz**, der Name folgt aus der Notation $Y^{X \times Z} \cong (Y^X)^Z$ wenn man statt $\mathscr{C}(X,Y)$ äquivalent Y^X schreibt.
Für basispunkterhaltende Abbildungen gilt das Exponentialgesetz analog mit:
$\tilde{\theta} : \mathscr{C}_0(X \wedge Z,Y) \to \mathscr{C}_0(Z,\mathscr{C}_0(X,Y))$ stetig und Homöomorphismus, falls Z hausdorffsch und X lokal kompakt hausdorffsch. Die Topologie auf $\mathscr{C}_0$ ist dabei die Teilraumtopologie von $\mathscr{C}$.
Die natürliche Abbildung θ stellt eine Verbindung zur Homotopie her, die wir als Nächstes betrachten.

2 Homotopie

Homotopie stellt allgemein eine Äquivalenzrelation auf Abbildungsräumen dar.
Definition:
Sind f,g stetige Abbildungen $X \to Y$, so heißen sie **homotop**: $f \simeq g$, wenn es eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \to Y$ gibt mit

$$F(x,0) = f(x) \qquad F(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

F ist dann die assoziierte Abbildung zur **Homotopie** $f_t(x) = F(x,t)$ zwischen f und g. Dies ist eine stetige einparametrige Familie in der Indexmenge $I = [0,1]$ von Abbildungen von X nach Y. Wenn man den Parameter $t \in [0,1]$ als Zeitparameter betrachtet, dann entspricht die Homotopie einer stetigen Deformation der Abbildung f in eine Abbildung g, während der Zeit 0 bis 1.
Mit Rückgriff auf die natürliche Abbildung und $Z = I$ sieht man, dass die Homotopie F eine Abbildung $\hat{F} : [0,1] \to \mathscr{C}(X,Y)$ induziert, die jedem Parameter $t \in [0,1]$ die entsprechende Abbildung $X \to Y$ zuordnet. Es wird deutlich, dass eine Homotopie F zwischen zwei stetigen $f,g : X \to Y$ genau einem Weg $\hat{F}$ im Abbildungsraum $\mathscr{C}(X,Y)$ entspricht, der den 'Punkt' $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ mit dem 'Punkt' $g \in \mathscr{C}(X,Y)$ verbindet.

2.1 Weghomotopie

Betrachtet man Wege auf X von x_0 nach x_1 also stetige Abbildungen $f : I \to X$ mit $f(0) = x_0$ und $f(1) = x_1$, so ergibt sich der Spezialfall der **Weghomotopie**, x_0 ist der **Startpunkt**, x_1 der **Endpunkt**.
f,$g : I \to X$ also $\in \mathscr{C}(I,X)$ heißen **weghomotop**: $f \simeq_p g$, wenn sie denselben Start- und Endpunkt haben und eine stetige Abbildung $F : I \times I \to X$ existiert mit:

$$\begin{array}{lll} F(x,0) = f(x) & F(x,1) = g(x) & \text{(Homotopie)} \\ F(0,t) = x_0 & F(1,t) = x_1 & \text{(Weg von } x_0 \text{ nach } x_1\text{)} \end{array}$$

$\forall s \in I$ und $\forall t \in I$. Weghomotopie ist also eine stetige Deformation von zwei Wegen die denselben Start-

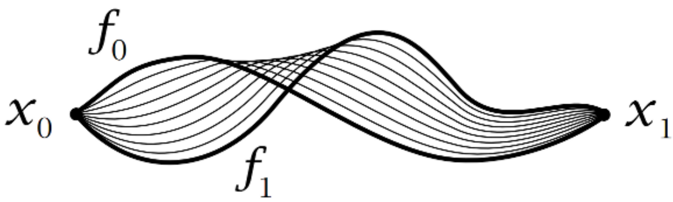

Abbildung 2.1: Weghomotopie von f_0 und f_1

und Endpunkt haben. Diese werden auch während der Deformation festgehalten. Dass Homotopie eine Äquivalenzrelation ist, lässt sich sehr einfach zeigen, aus Platzgründen sei hier jedoch auf S. 320 [Hus94]) verwiesen. Zu jeder Abbildung $f \in \mathscr{C}(X,Y)$ bezeichnet man ihre Äquivalenzklasse, die **Homotopieklasse** von f, mit dem **Repräsentanten** $[f] = \{g : X \to Y : g \simeq f\}$. Die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen in $\mathscr{C}(X,Y)$ bezeichnet man mit $[X,Y]$.
Wenn eine Verknüpfung von Abbildungen in $\mathscr{C}(X,Y)$ gegeben ist, dann induziert diese eine Operation auf Homotopieklassen (siehe S. 322ff. [Hus94]), allgemein definiert als:

$$[f] * [g] = [f \circ g]$$

Dies ist insbesondere für Wege in X der Fall, wenn gilt: Sei f ein Weg in X von x_0 nach x_1, g ein Weg in X von x_1 nach x_2 und $f(1) = g(0)$. Dann definiert man die Verknüpfung $f \circ g$ als Produktweg von f und g

mit:

$$(f \circ g)(s) = h(s) = \begin{cases} f(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

h ist wohldefiniert, stetig und ein Weg von x_0 nach x_2, wobei jeder Teilweg in doppelter Geschwindigkeit durchlaufen wird: ($h(0) = f(0)$,$h(\frac{1}{2}) = f(1) = g(0)$,$h(1) = g(1)$).
Es gilt dann $f_0 \circ g_0 \simeq_p f_1 \circ g_1$ falls $f_0 \simeq_p f_1$ und $g_0 \simeq_p g_1$
Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt außerdem **Homotopieäquivalenz**, wenn es eine stetige Abbildung g gibt von Y nach X, so dass $g \circ f \simeq id_X$ und $f \circ g \simeq id_Y$. Die Abbildung g heißt dann **Homotopieinverse** der Abbildung f. Zwei Räume die **homotopieäquivalent** sind, wenn also solch ein f existiert, haben denselben **Homotopietyp** mit Bezeichnung $X \simeq Y$.
Eine Abbildung heißt **nullhomotop**, wenn sie zur konstanten Abbildung $e_{x_0} : X \to x_0$ homotop ist.
Ein Raum heißt **zusammenziehbar**, wenn die Identitätsabbildung $i_X : X \to X$ nullhomotop ist. Zusammenziehbar bedeutet also homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Raum. id_X ist stets eine Homotopieäquivalenz und mit $X \simeq Y \simeq Z$ gilt $Y \simeq X$ und $X \simeq Z$. Homöomorphe Räume haben denselben Homotopietyp.
Konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind z.B. zusammenziehbar, $h_t(x) := (1-t)x$ definiert eine Zusammenziehung also eine Homotopie auf 0. Wenn Y zusammenziehbar ist, dann hat $[X,Y]$ für beliebige X ein einziges Element.

2.2 Homotopie im Schleifenraum

Zuletzt noch ein besonders wichtiger Spezialfall der Homotopie, nämlich die Homotopie von basispunkterhaltenden Abbildungen im Schleifenraum $\mathscr{C}_0(S^1, X) = \Omega(X)$, wobei $S^1 = (S^1, s_1)$ mit $s_1 = (1,0)$ und $X = (X, x_0)$.
Hier lässt sich eine Analogie zu einer Weghomotopie von **geschlossenen Wegen**, den so genannten **in** x_0 **basierten Schleifen** herstellen, bei denen Start- und Endpunkt zusammenfallen, also $f(0) = x_0 = f(1)$. Diese Definition kann man auf höherdimensionale Schleifenräume erweitern, die wir noch verwenden werden. Die erwünschte Eigenschaft, die man auf Schleifenräumen erhält, ist die Tatsache, dass eine Verknüpfung für alle Elemente definiert ist.

3 Homotopiegruppen

Von nun an betrachte man nur noch die punktierten Räume mit $X = S^n \quad n \geq 1$.
Im Hinblick auf die weiteren Themen des Seminars wird sich zeigen, dass weitere zu konstruierende Räume sich stets auf diese zurückführen lassen.
Den Basispunkt beschreibt man oft allgemein mit $*$ und definiert $\pi_n(X,x_0)$ als die Menge der Homotopieklassen $[(S^n,*),(X,x_0)]$.
Diese Menge weist eine bestimmte Struktur auf, abhängig von der Dimension n. Für $n = 1$ bildet sie eine Gruppe, für $n \geq 2$ sogar eine abelsche Gruppe. Die Verknüpfung zwischen den Elementen leitet sich ab von der Verknüpfung auf dem Schleifenraum $\mathscr{C}_0(S^n,X)$.
Wegen der Gruppeneigenschaft bezeichnet man π_1 als **Fundamentalgruppe** von X bzgl. des Basispunkts x_0, und die π_n für $n \geq 2$ als höhere **Homotopiegruppen**. In diesem Sinne ist π_1 die erste Homotopiegruppe.
Die Definition wird auch auf $n = 0$ erweitert, jedoch bildet π_0 im Allgemeinen keine Gruppe.
Im Sinne der Kategorietheorie (S. 162f [Hat02]) wird π_n zu einem Funktor auf der Kategorie Top_* der topologischen Räume und stetigen Abbildungen, der den Objekten, also den topologischen Räumen entweder Mengen für $n = 0$, Gruppen für $n = 1$ oder abelsche Gruppen für $n \geq 2$ zuordnet und den Morphismen, also den stetigen Abbildungen Gruppenhomomorphismen für $n \geq 1$.
$\pi_0 : Top_* \to Sets$ ist ein Funktor, der die Wegzusammenhangskomponenten zählt (siehe nächstes Kapitel).
Für $n \geq 1$ ist die Verknüpfung von zwei Schleifen die Summen $f+g$, dargestellt als Komposition
$S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X$, wobei c den Äquator S^{n-1} von S^n zu einem Punkt zusammenschlägt und man den Basispunkt auf dem Äquator wählt, danach werden f und g auf die 'Teilsphären' angewendet.
Zwei Schleifen bestimmen das gleiche Element der Homotopiegruppe, wenn es eine Homotopie zwischen

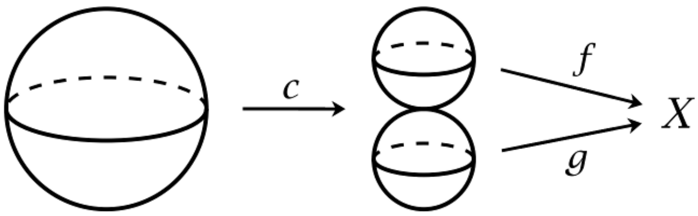

Abbildung 3.1: Summe $f+g$ als Komposition

beiden gibt. Das neutrale Element ist daher bis auf Homotopie die konstante Schleife in $*$, inverse Elemente sind bis auf Homotopie die rückwärts durchlaufenen Schleifen.
Die Notation ist additiv, weil man für $n \geq 2$ eine Rotation um π auf der Sphäre anwenden kann, so dass die 'Teilsphären' ihre Positionen tauschen und deshalb die Reihenfolge von f und g vertauscht werden kann. Die entstehende Homotopiegruppe ist also abelsch.
π_n ist wieder ein Funktor und eine basispunkterhaltende Abbildung $\varphi : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ induziert einen Homomorphismus $\varphi_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ durch $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$. Dieser hat funktorielle Eigenschaften, d.h. $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ für zwei basispunkterhaltende Abbildungen $\varphi : (X,x_0) \to (Y,y_0)$, $\psi : (Y,y_0) \to (Z,z_0)$ und $i_* \circ \varphi_* = \varphi_*$, $\varphi_* \circ i_* = \varphi_*$ für $i : (X,x_0) \to (X,x_0)$.

Proposition:
Wenn φ eine Homotopieäquivalenz ist, dann ist $\varphi_* : \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$ ein Isomorphismus.
Für den Beweis siehe S. 371f [Hus94] bzw. S. 37 [Hat02]. Insbesondere gilt die Aussage für Homöomorphismen φ.

3.1 Veranschaulichung von π_0 und π_1

Wie bereits erwähnt, erweitert man die Definition der Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $f : S^n \to X$ mit $f(*) = x_0$ auf $n = 0$ durch $\pi_0(X,x_0) = [(S^0,*),(X,x_0)]$

Diese Abbildung mit $S^0 = \{0,1\}$, $S^0 \to X$, $f(1) = x_0$ kann man für einen einfachen Raum X gut veranschaulichen: Der Punkt 1 wird immer auf x_0 abgebildet. Abbildungen f, die 0 auf x und g, die 0 auf y

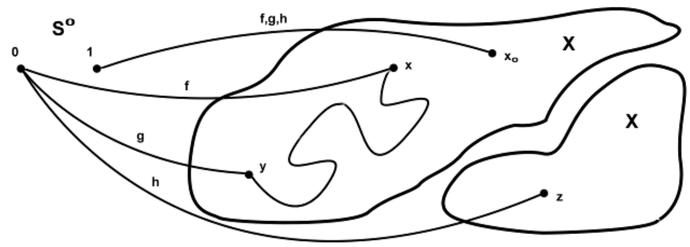

Abbildung 3.2: $S^0 \to X$

abbilden, sind homotop, wenn es einen Weg von x nach y in X gibt. D.h. alle Abbildungen, die 0 auf dieselbe Wegzusammenhangskomponente von X schicken, liegen in der selben Homotopieklasse.
Die Anzahl der Homotopieklassen entspricht also der Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten. π_0 ist i.A. keine Gruppe und zählt als Funktor die Wegzusammenhangskomponenten von X. Dass X wegzusammenhängend ist, ist äquivalent dazu, dass π_0 aus einem Element besteht.
$\pi_1(X,x_0) = [(S^1,*),(X,x_0)]$ ist die Fundamentalgruppe von X. Auch hier veranschaulicht man: Der Basis-

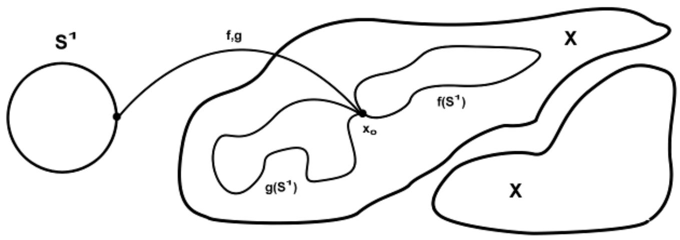

Abbildung 3.3: $S^1 \to X$

punkt $(1,0)$ wird auf x_0 abgebildet. Weil S^1 wegzusammenhängend ist, so ist auch jede stetige Abbildung von S^1 wegzusammenhängend. Jedes Bild von S^1 befindet sich also ausnahmslos vollständig in der Wegzusammenhangskomponente, die x_0 enthält. Jede weitere Wegzusammenhangskomponente bleibt völlig unbeachtet. Ist X z.B. eine 2-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3$, so kann es nur verschiedene Homotopieklassen geben, wenn die Fläche Löcher aufweist, sonst ist jede Schleife darin nullhomotop, π_1 also die triviale Gruppe.
So ist z.B. $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ (Die Homotopieklassen werden hier durch die Windungszahl um 0 unterschieden) und $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ für den Torus T (S. 34 [Hat02]). Ist X z.B. höherdimensional, so lassen sich keine einfachen Löcher mehr entdecken, denn jede Schleife würde sich daran vorbeiziehen lassen zu einem Punkt. π_1 wäre in diesem Fall trivial, z.B. $\pi_1(\mathbb{R}^3 - 0) = \{1\}$. Jede konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine triviale Fundamentalgruppe.
Wegen der Relevanz nur für die Wegzusammenhangskomponente von x_0 setzt man daher lieber voraus, dass X wegzusammenhängend ist. Dann aber ist die Fundamentalgruppe bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des Basispunkts (siehe S. 328 [Hus94]), d.h.
Proposition:
Wenn X wegzusammenhängend ist und $x_0,x_1 \in X$, dann ist $\pi_1(X,x_0)$ isomorph zu $\pi_1(X,x_1)$.
Denn man kann eine Schleife mit Basispunkt x_1 zu einer Schleife mit Basispunkt x_0 erweitern, indem man zuerst einen Weg von x_0 nach x_1, dann die Schleife in x_1 und anschließend Rückweg von x_1 nach x_0 zurücklegt. Die Homotopieklasse ändert sich dabei nicht.
Ein Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend also π_0 trivial ist und die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ trivial ist für ein $x_0 \in X$, also wegen des Wegzusammenhangs $\forall x_0 \in X$.
Für Homotopiegruppen von n-Sphären siehe S. 339 [Hat02].

3.2 Homotopiegruppen des Schleifenraums

Üblicherweise ist π_0 die Menge der Wegzusammenhangskomponenten und verfügt über keinerlei Verknüpfung. Für Schleifenräume Ω^n jedoch, für $n \geq 1$ wird durch Ω^n eine Verknüpfung auch auf π_0 induziert, so dass $\pi_0(\Omega^n)$ zu einer Gruppe wird.

Proposition:

$$\pi_n(X, x_0) \quad \cong \quad \pi_0(\Omega^n(X, x_0), c_{x_0})$$

c_{x_0} ist dabei die konstante Abbildung im Schleifenraum $\Omega^n(X, x_0) = \mathscr{C}_0((S^n, *), (X, x_0))$, also der dortige Basispunkt.
Beweis:

$$\begin{aligned}
\pi_n(X, x_0) &= [(S^n, *), (X, x_0)] \overset{*1}{\cong} [(S^{n-1} \wedge S^1, *), (X, x_0)] \\
&\overset{*2}{\cong} [(S^{n-1}, *), \mathscr{C}_0((S^1, *), (X, x_0))] = [(S^{n-1}, *), (\Omega^1(X, x_0), c_{x_0})] \\
&\overset{*3}{=} \pi_{n-1}(\Omega^1(X, x_0), c_{x_0}) \\
&\cong [(S^{n-2} \wedge S^1, *), (\Omega^1(X, x_0), c_{x_0})] \cong [(S^{n-2}, *), \mathscr{C}_0((S^1, *), (\Omega^1(X, x_0), c_{x_0}))] \\
&= [(S^{n-2}, *), (\Omega^1(\Omega^1(X, x_0), c_{x_0}), c_{x_0})] \overset{*4}{\cong} [(S^{n-2}, *), (\Omega^2(X, x_0), c_{x_0})] \\
&\cong \quad \ldots \\
&\cong \pi_1(\Omega^{n-1}(X, x_0), c_{x_0}) \\
&\cong \pi_0(\Omega^n(X, x_0), c_{x_0})
\end{aligned}$$

$*1$: $S^n \cong S(S^{n-1}) = S^{n-1} \wedge S^1$
$*2$: Hier geht das Exponentialgesetz $\mathscr{C}_0(Z \wedge X, Y) \cong \mathscr{C}_0(Z, \mathscr{C}_0(X, Y))$ ein.
$*3$: Hier sieht man, dass der Übergang von einem Raum zu einem Schleifenraum die Homotopiegruppe um eine Dimension zurücksetzt.
$*4$: $\Omega(\Omega X) = \Omega^2 X$
Insbesondere gilt für $n = 1$: $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_0(\Omega(X, x_0), c_{x_0})$
Wegen $\Sigma X = S^1 \wedge X$ folgt aus dem Exponentialgesetz sofort die Beziehung zwischen ΣX und ΩY:

$$\begin{aligned}
\mathscr{C}_0(Z \wedge X, Y) &\cong \mathscr{C}_0(Z, \mathscr{C}_0(X, Y)) \\
\mathscr{C}_0(\Sigma X, Y) &\cong \mathscr{C}_0(X, \mathscr{C}_0(S^1, Y)) \\
&= \mathscr{C}_0(X, \Omega Y)
\end{aligned}$$

Anhang

Zu Abschluss noch eine Wiederholung der elementaren topologischen Begriffe:
Ein **topologischer Raum** ist eine Menge X zusammen mit einem System $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ von Teilmengen von X, genannt **offene Mengen**, so dass $\emptyset$, X offen, sowie beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen offen in X sind.
Die **Topologie** τ kann explizit über die Aufzählung aller Elemente angegeben werden oder über eine Teilmenge von τ, die **Basis** $\mathscr{B}$, die τ erzeugt.
Eine Basis ist ein System von Basiselementen, für die gilt:
Jedes $x \in X$ liegt in mindestens einem Basiselement und wenn $x \in X$ im Durchschnitt zweier Basiselemente B_1, B_2 liegt, dann gibt es ein drittes Basiselement B_3, das x enthält und in dem Durchschnitt $B_1 \cap B_2$ liegt.
Die Topologie ist dann das System aller Vereinigungen von Basiselementen.
Alternativ kann auch ein System von Teilmengen von X deren Vereinigung gleich X ist, eine **Subbasis** $\mathscr{S}$, eine Topologie erzeugen. Diese ist definiert als das System aller Vereinigungen von Durchschnitten von Elementen aus $\mathscr{S}$.
Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **stetig**, wenn Urbilder $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ offener Mengen U in Y unter dieser Abbildung in X offen sind.
Ein topologischer Raum heißt **hausdorffsch**, wenn zu jedem Paar x_1,$x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ Umgebungen, also offene Mengen, die je x_1, x_2 enthalten, existieren, die disjunkt sind.
Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn es kein Paar U,V disjunkter, nichtleerer, offener Teilmengen von X gibt, deren Vereinigung X ist. X heißt **wegzusammenhängend**, wenn jedes Paar x_1,$x_2 \in X$ durch einen Weg verbunden werden kann, also es eine stetige Abbildung $f : [a,b] \to X$ gibt mit $f(a) = x_1$ und $f(b) = x_2$.
Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthält.
Räume, die dieselben topologischen Eigenschaften aufweisen nennt man **homöomorph**. Dies ist der topologische Isomorphiebegriff und bedeutet, dass es zwischen beiden Räumen einen **Homöomorphismus** gibt, also eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$, die stetig ist und deren Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist. Eine Bijektion $f : X \to Y$ ist also ein Homöomorphismus, wenn $f(U)$ offen in Y ist genau dann wenn U offen ist in X. Ein Homöomorphismus liefert also eine bijektive Abbildung zwischen den Systemen offener Mengen in X und Y. Jede topologische Eigenschaft ist also beiden Räumen gemeinsam.
Wenn X kompakt und Y hausdorffsch ist, dann ist bereits jede stetige bijektive Abbildung $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus.

Literaturverzeichnis

[Hus94] D. Husemoeller, *Fibre bundles*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Mun75] J.R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[Hat02] A. Hatcher, *Vector bundles and K-theory*. Book project, available from the author's web page, http://www.math.cornell.edu/˜hatcher/.

[Rot88] J.J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1988.

[FR04] D. B. Fuks and V. A. Rokhlin, *Beginner's course in topology*, Universitext, Springer, 2004.